Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II (SS 09)

Aufgabe 43

Der kovariante Riemanntensor kann sowohl bezüglich des ersten als auch bezüglich des zweiten Indexpaars dualisiert werden. Macht man beides, erhält man den *doppelt dualen* Riemann-Tensor $*R*$. Zeigen Sie, dass $(*R*)_{ki}{}^{jk} = G_i{}^j$.

Aufgabe 44

Zeigen Sie
a) $\delta g = g g^{ik} \delta g_{ik}$ und
b) $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} = \Gamma^l{}_{il}$.
Folgern Sie aus b), dass für ein total antisymmetrisches Tensorfeld T gilt

$$\nabla_i T^{ii_1 \cdots i_p} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} T^{ii_1 \cdots i_p}).$$

Aufgabe 45

Zeigen Sie $\mathcal{L}_u v = [u, v]$ und $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u,v]}$.

Aufgabe 46

Zeigen Sie: Falls ein Killingvektorfeld $\xi \neq 0$ existiert, gibt es ein KS, in dem g_{ik} von einer Koordinate nicht abhängt.

Aufgabe 47

Der Gauß'sche Satz für ein antisymmetrisches Tensorfeld $J^{ik} = -J^{ki}$ auf einer Hyperfläche Σ lautet

$$\int_\Sigma \nabla_i J^{ik} d\sigma_k = -\frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma} J^{ik} d\sigma_{ik}$$

$$(d\sigma_{ik} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{iklm} dx^l \wedge dx^m).$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass eine Raum-Zeit mit Killingvektor ξ die Erhaltungsgröße

$$\int_{S_\infty} \nabla^i \xi^k d\sigma_{ik}$$

besitzt, wo S_∞ der "Rand im Unendlichen" einer raumartigen Hyperfläche Σ ist. Wie hängt diese Erhaltungsgröße mit der in der Vorlesung hergeleiteten $\int_\Sigma j^a d\sigma_a$ zusammen? Hinweis: Verwenden Sie die Einstein-Gleichungen.

Aufgabe 48
Verallgemeinern Sie die speziell-relativistische Maxwell-Wirkung

$$S[A] = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{ij} F^{ij} + \int d^4x j^i A_i$$

auf eine gekrümmte Raum-Zeit und leiten Sie daraus die kovarianten Maxwell-Gleichungen her.

Aufgabe 51
Die GPS-Satelliten bewegen sich auf einer Kreisbahn in 20200 km Höhe. Wie verhält sich der Gang einer Uhr, die auf dem Erdboden ruht, zum Gang einer Satellitenuhr? Schätzen Sie daraus den Fehler der Positionsbestimmung ab, der sich bei Vernachlässiggung relativistischer Korrekturen im Laufe eines Tages anhäufen würde.

Aufgabe 52
Verifizieren Sie die isotrope Form der Schwarzschild-Metrik.

Aufgabe 53
Zeigen Sie: Jede dreidimensionale sphärisch symmetrische Metrik ist konform flach.

Aufgabe 54
Verifizieren Sie, dass in einer statischen sphärisch symmetrischen Metrik

$$\nabla_k T_1{}^k = \frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(\epsilon + p)$$

ist.

Aufgabe 55
Zeigen Sie, dass für einen statischen kugelsymmetrischen Stern mit $\epsilon = const$ $p(0) \to \infty$ für $R \to \frac{9}{4}\mathcal{M}$.

Aufgabe 56
Schätzen Sie die Grenzmasse für einen Stern aus relativistischen Bosonen ab.

Aufgabe 57
Berechnen Sie die Eigenzeit für den radialen freien Fall in der Schwarzschild-Metrik von $r = R$ nach $r = 0$.