Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II (SS 09)

Aufgabe 25

Sei M_1 die Zahlengerade $\mathbf{R}$ mit der Standard-Differenzierbarkeitsstruktur und M_2 die differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert durch $\mathbf{R}$ mit dem Atlas $\{x \mapsto x^3\}$. Zeigen Sie:
a) Die Differenzierbarkeitsstrukturen von M_1 und M_2 sind nicht verträglich.
b) Die Identität auf $\mathbf{R}$ ist kein Diffeomorphismus von M_1 nach M_2.
c) Geben Sie einen Diffeomorphismus von M_1 nach M_2 an.

Aufgabe 26

Beweisen Sie mit der abstrakten Definition eines Tangentenvektors v, dass $v(c) = 0$ für eine konstante Funktion c.

Aufgabe 27

Zeigen Sie, dass die Tangentenvektoren $\partial_i|_P$ eine Basis für T_P bilden. Verwenden und beweisen Sie folgendes Lemma: Eine beliebige Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist darstellbar als $\phi(x) = \phi(0) + g_i(x)x^i$ mit $g_i(0) = \partial_i\phi|_0$.

Aufgabe 28

Zeigen Sie abstrakt, dass die Lie-Klammer zweier Vektorfelder ein Vektorfeld ist, und berechnen Sie die Komponenten von $[u, v]$.

Aufgabe 29

Berechnen Sie den Defizitvektor Δ eines von zwei Vektoren auf einer afffinen Mannigfaltigkeit gebildeten infinitesimalen Parallelogramms.

Aufgabe 30

Zeigen Sie: Die Koeffizienten einer torsionsfreien Konnexion können in einem beliebigen Punkt zu 0 transformiert werden.

Aufgabe 31

Zeigen Sie: Die Koeffizienten einer torsionsfreien Konnexion können entlang einer beliebigen Linie zu 0 transformiert werden.

Aufgabe 32

Berechnen Sie $\nabla_{[i}\nabla_{j]}f$ und $\nabla_{[i}\nabla_{j]}v^a$.

Aufgabe 33

Geometrisierung der Newtonschen Gravitation

Lesen Sie aus der Bewegungsgleichung für ein Testteilchen im Newtonschen Gravitationspotential V Konnexionskoeffizienten ab, berechnen Sie daraus den Krümmungstensor und zeigen Sie, dass die Poisson-Gleichung sich als $R_{00} = -4\pi G\rho$ schreiben lässt.

Aufgabe 34

Zeigen Sie, dass die Geometrie aus Aufgabe 33 die Newtonsche Zeit t auf folgende Weise auszeichnet:
a) Die 1-Form dt ist kovariant konstant;
b) der Paralleltransport von Vektoren, die einen Raumschnitt $t = const$ tangieren, ist allgemein wegunabhängig;
c) der Paralleltransport beliebiger Vektoren ist innerhalb eines solchen Raumschnitts wegunabhängig.

Aufgabe 35

Zeigen Sie, dass eine mit der Konnexion aus Aufgabe 33 kompatible Metrik auf den Raumschnitten existiert, aber nicht in der Raum-Zeit. Geben Sie eine kompatible *entartete* Raum-Zeit-Metrik an.

Aufgabe 36

Die 1-Form der metrischen Konnexion einer Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit bezogen auf ein orthonormales n-Bein heißt "Spin-Konnexion". Zeigen Sie, dass jede Spin-Konnexion $L_{ABi} = -L_{BAi}$ erfüllt.

Aufgabe 37

Das Theorema egregium. Eine glatte Fläche im $\mathbf{E}^3$ kann in der Umgebung eines beliebigen Punktes in geeigneten kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$ genähert werden (warum?). Zeigen Sie, dass R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien im betrachteten Punkte sind. Berechnen Sie die induzierte Metrik $g_{ij}(x, y)$ in der Umgebung und den Krümmungsskalar im betrachteten Punkt.

Aufgabe 38

Beweisen Sie die Formel für die Schnittkrümmung einer geodätischen Fläche
a) für $n = 2$;
b) für $n > 2$. (Hinweis: Der intrinsische Riemann-Tensor im Ursprung der geodätischen Fläche ist identisch mit der Einschränkung des n-dimensionalen Riemann-Tensors.)

Aufgabe 39

Beweisen Sie die Identität $R_{ijkl} = R_{klij}$ für den Riemann-Tensor als Konsequenz der in der Vorlesung gelisteten Identitäten 1-3.

Aufgabe 40

Zeigen Sie, dass der Riemann-Tensor in 4 Dimensionen 20 algebraisch unabhängige Komponenten hat.

Aufgabe 41

Verifizieren Sie die Spurfreiheit und die algebraischen Symmetrien des Weyl-Tensors.

Aufgabe 42

Verifizieren Sie die Komponenten einer metrischen Volumsform in lokalen Koordinaten.