Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II (SS 09)

Aufgabe 13

In einem Newtonschen Schwerefeld außerhalb der Quellen ruhen Testteilchen relativ zu einem frei fallenden Beobachter zu $t = 0$ auf der Oberfläche eines diesen umgebenden kleinen Gebiets mit Volumen δV. Zeigen Sie, dass das von den Teilchen eingeschlossene Volumen anfangs annähernd konstant bleibt: $\delta V(t) = \delta V(0)$ für kleines t. Skizzieren Sie die Zeitentwicklung eines kugelförmigen Gebiets in einem Zentralfeld.

Aufgabe 14

Beweisen Sie die Verallgemeinerung des Sachverhalts aus Aufgabe 13:
In einem allgemeinen Newtonschen Gravitationsfeld gilt

$$\frac{d^2\delta V}{dt^2}|_{t=0} = -4\pi G\delta M,$$

wo δM die im von den Teilchen umschlossenen Gebiet enthaltene Gesamtmasse ist.

Aufgabe 15

Beweisen Sie die allgemein-relativistische Verallgemeinerung des Sachverhalts aus Aufgabe 14:

$$\frac{D^2\delta V}{d\tau^2}|_{\tau=0} = R_{ij}u^i u^j \delta V,$$

wo τ und u^i die Eigenzeit bzw. Vierergeschwindigkeit des frei fallenden Beobachters sind. *Anleitung*: Beachten Sie, dass δV im Ruhsystem des Beobachters gemessen wird.

Aufgabe 16

Vergleichen Sie das Resultat aus 15. mit dem aus 14., begründen Sie die Bedeutung von $-(4\pi G)^{-1}R_{00}$ als *Dichte der aktiven schweren Masse* und zeigen Sie, dass in einem lokalen Lorentz-System

$$R_{00} = -\frac{\kappa}{2}(\epsilon + p_1 + p_2 + p_3).$$

Was bedeuten die p_α?

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass $R_{ik} = -\kappa T_{ik}$ die Konstanz von ${T_l}^l$ impliziert.

Aufgabe 18

Zeigen Sie, dass die harmonische Eichung lokal immer erreichbar ist und diskutieren Sie ihre Eindeutigkeit.

Aufgabe 19

Leiten Sie die harmonische Eichbedingung aus der harmonischen Koordinatenbedingung her.

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass der linearisierte Riemann-Tensor eichinvariant ist.

Aufgabe 21

Beweisen Sie das *Laue-Theorem*:

$$\int T_{\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T_{00} x^\alpha x^\beta d^3x$$

für ein isoliertes System im Grenzfall des Minkowskiraums.

Aufgabe 22

Beweisen mit Hilfe des Laue-Theorems, dass jede isolierte stationäre Energie-Impuls-Verteilung das asymptotische Feld $h_{00} = GM_{in}/r$ erzeugt. Warum ist das kein Widerspruch zum formalen Resultat $h_{00} = 2GM_{in}/r$ für das reine elektromagnetische Feld?

Aufgabe 23

Schätzen Sie ab

a) die Größenordnung von Ω_m auf der Erdoberfläche,

b) die Größenordnung von Ω_{stat} auf einer niedrigen Erdumlaufbahn.

Aufgabe 24

a) Zeigen Sie, dass Fermi-Walker-Transport die Thomas-Präzession impliziert.

Anleitung: Betrachten Sie die Transportgleichung in einem instantan mitbewegten Inertialsystem (keine Rechnung erforderlich!).

b) Berechnen Sie $d\vec{s}/dt$ und leiten Sie daraus die Thomas-Präzessionsfrequenz für kleine Geschwindigkeit $\vec{v}$ her.