Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II

Aufgabe 52
Berechnen sie die Christoffel-Symbole $\Gamma^{\alpha}{}_{jk}$ für die allgemeine sphärisch symmetrische Metrik.

Aufgabe 53
Verifizieren Sie die isotrope Form der Schwarzschild-Metrik.

Aufgabe 54
Zeigen Sie: Jede dreidimensionale sphärisch symmetrische Metrik ist konform flach.

Aufgabe 55
Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Konstanten der geodätischen Bewegung K, l, E, T in der Schwarzschild-Geometrie.

Aufgabe 56
Zeigen Sie für den Einfangquerschnitt σ_c der Schwarzschild-Geometrie:
a) Für massive Teilchen und $|l| \gg \mathcal{M}$ ist $\sigma_c \approx 27\pi\mathcal{M}^2 c^2/v_\infty^2$.
b) Für masselose Teilchen ist $\sigma_c = 27\pi\mathcal{M}^2$.

Aufgabe 57
Zeigen Sie: Für Kreisbahnen in der Schwarzschild-Metrik ist $\omega^2 r^3 = \mathcal{M}$, wobei $\omega = d\phi/dt$ und r die Schwarzschild-Radialkoordinate ist.

Aufgabe 58
Berechnen Sie die Verspätung (in Erdzeit) des Radarechos eines Planeten (Sonnenabstand r_1) a) in Opposition oder unterer Konjunktion , b) in oberer Konjunktion mit der Sonne.

Aufgabe 59
Verifizieren Sie, dass in einer statischen sphärisch symmetrischen Metrik

$$\nabla_k T_1{}^k = \frac{dp}{dr} + \frac{\nu'}{2}(\epsilon + p)$$

ist.

Aufgabe 60
Zeigen Sie, dass für einen statischen kugelsymmetrischen Stern mit $\epsilon = const$ $p(0) \to \infty$ für $R \to \frac{9}{4}\mathcal{M}$.

Aufgabe 61
Schätzen Sie die Grenzmasse für einen Stern aus relativistischen Bosonen ab.

Aufgabe 62
Berechnen Sie die Eigenzeit für den radialen freien Fall in der Schwarzschild-Metrik von $r = R$ nach $r = 0$.

Aufgabe 63
Zeigen Sie, dass Isotropie in einem Punkt für höchstens einen Beobachter gelten kann, außer im Vakuum.

Aufgabe 64
Verifizieren Sie die Standard-Metriken auf S^3 und H^3.

Aufgabe 65
Zeigen Sie für ein isotropes homogenes Universum:
Die Projektion (entlang der ausgezeichneten Weltlinien) einer Nullgeodäte auf eine homogene Hyperfläche Σ ist
a) eine Geodäte bezüglich der 3-Geometrie von Σ,
b) eine Killingtrajektorie.

Aufgabe 66
Zeigen Sie, dass in einem isotropen homogenen Universum mit Skalenfaktor
$R(t) \propto t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, der heutige Abstand von einem Objekt mit Rotverschiebung z

$$d_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha} H_0^{-1} [1 - (1+z)^{1-1/\alpha}]$$

ist.