

Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II

Aufgabe 15

Zeigen Sie das Verhalten der Christoffel-Symbole unter einer AKT:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \Gamma_{mn}^l + \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k}.$$

Folgern Sie daraus die Gültigkeit der Formel für $\nabla_k v^i$.

Aufgabe 16

Verifizieren Sie die Formel $\nabla_k v_i = v_{i,k} - \Gamma_{ik}^l v_l$.

Aufgabe 17

a) Zeigen Sie, dass im Ursprung eines RNKS gilt:

$$\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{lj,k}^i + \Gamma_{kl,j}^i = 0.$$

Anleitung: Betrachten Sie $d^3 x^i / ds^3$ entlang Geodäten.

b) Folgern Sie daraus die zyklische Symmetrie des Riemann-Tensors.

Aufgabe 18

Folgern Sie aus 17.a), dass im Ursprung eines RNKS gilt:

$$g_{ij,kl} = \frac{1}{3}(R_{iklj} + R_{iljk}).$$

Aufgabe 19

Zeigen Sie, dass R_{abcd} durch $S_{abcd} := R_{d(ab)c}$ bestimmt ist. Hinweis: Bilden Sie die Antisymmetrisierung von S_{abcd} in b und c .

Aufgabe 20

Beweisen Sie die Bianchi-Identität.

Aufgabe 21

Berechnen Sie den Riemann- und den Einstein-Tensor für die Metrik aus Aufgabe 10 (reduziert auf 1+1 Dimensionen) als Distribution von $\tilde{\xi}$.

Aufgabe 22

Zeigen Sie: $T_{ik} \rightarrow T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T^l_l$ ist eine Involution auf dem Raum der symmetrischen Tensoren.

Aufgabe 23

Zeigen Sie, dass die harmonische Eichung immer erreichbar ist und diskutieren Sie ihre Eindeutigkeit.

Aufgabe 24

Zeigen Sie, dass die harmonische Koordinatenbedingung die harmonische Eichbedingung impliziert.

Aufgabe 25

Zeigen Sie, dass der linearisierte Riemann-Tensor eichinvariant ist.

Aufgabe 26

Beweisen Sie das Laue-Theorem:

$$\int T_{\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T_{00} x^\alpha x^\beta d^3x$$

für ein isoliertes System im Grenzfall des Minkowskiraums.

Aufgabe 27

Beweisen Sie mit Hilfe des Laue-Theorems, dass jede isolierte stationäre Energie-Impuls-Verteilung das asymptotische Feld $h_{00} = GM_{in}/r$ erzeugt. Warum ist das kein Widerspruch zum formalen Resultat $h_{00} = 2GM_{in}/r$ für das reine elektromagnetische Feld?

Aufgabe 28

Schätzen Sie die Größenordnung von Ω_m auf der Erdoberfläche ab.

Aufgabe 29

Transformieren Sie die Metrik der 1. post-Newtonschen Näherung auf ein mit Geschwindigkeit \vec{v} bewegtes IS I' des Minkowskiraums mit Vernachlässigung von Termen $O(v^4)$.