Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II

Aufgabe 1

Speziell-relativistische Gravitationstheorie: Das Newtonsche Gravitationspotential $V(\vec{x})$ soll zu einem skalaren Feld $\Phi(x)$ im Minkowskiraum verallgemeinert werden. Betrachten Sie staubartige Materie mit Energie-Impuls-Tensor $T_{ab} = \rho u_a u_b$ und stellen Sie eine lorentzinvariante inhomogene Wellengleichung für $\Phi(x)$ auf, die sich im Newtonschen Grenzfall ($\Phi(x) = V(\vec{x})$, $u^a \approx (1, \vec{0})$) auf die Poisson-Gleichung für V reduziert. Was sagt diese Theorie über die gravitative Wirkung elektromagnetischer Felder aus?

Aufgabe 2

Geben Sie die lorentzkovariante Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Teilchen im "Gravitationspotential" $\Phi(x)$ aus Aufgabe 1 an. Konstruieren Sie ein Wirkungsprinzip für diese Bewegungsgleichung. Warum ist diese Bewegungsgleichung problematisch?

Aufgabe 3

Leiten Sie analog zur Elektrostatik einen Ausdruck für die Energiedichte des Newtonschen Gravitationsfelds her und drücken Sie diese durch die Feldstärke $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ aus. Warum macht dieses Resultat die Newtonsche Theorie potentiell instabil? Gilt das auch für die Theorie aus Aufgabe 1?

Aufgabe 4

Versuchen Sie eine "vektorielle" speziell-relativistische Gravitationstheorie mit Viererpotential $B^\mu(x)$ aufzustellen. Welches grundsätzliche Problem stellt sich bei der Suche nach einem Quellterm für die Feldgleichungen?

Aufgabe 5

Modifizieren Sie die Maxwell-Gleichungen derart, dass gleichnamige Ladungen einander anziehen. Welches Problem handelt man sich damit ein? (Betrachten Sie die Feldenergie.) Gewinnen Sie daraus ein weiteres Argument für die Unhaltbarkeit einer vektoriellen Gravitationstheorie.

Aufgabe 6

Angenommen, es gibt nur geladene Teilchen mit $q/m = const$. Erfüllt dann die Elektrodynamik a) das Newtonsche, b) das Einsteinsche Äquivalenzprinzip?

Aufgabe 7

In der Newtonschen Theorie lässt sich ein statisches, räumlich konstantes Gravitationsfeld "wegtransformieren". Es ist daher zu erwarten, dass die relativistische Version eines uniformen Gravitationsfeldes durch eine gewisse Klasse von beschleunigten Beobachtern im Minkowskiraum realisiert wird. Betrachten Sie den zweidimensionalen Minkowski-

raum und konstruieren Sie eine Schar von Weltlinien, die diese Beobachter repräsentieren. Beachten Sie, dass jeder Beobachter eine konstante Beschleunigung fühlt und der Abstand (gemessen von den Beobachtern) zwischen den Beobachtern konstant bleibt. Diese Eigenschaften legen die Schar eindeutig fest.
Lösung: Konzentrische gleichseitige Hyperbeln ($c = 1$).

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die Beschleunigung der Beobachter aus Aufgabe 7 von Weltlinie zu Weltlinie verschieden ist. Wie hängt sie vom Hyperbelradius ab? Führen Sie (auf einfachste Weise, vgl. das euklidische Analogon) diesen Beobachtern "angepasste" Koordinaten τ, ξ so ein, dass die Hyperbeln bzw. die Linien der Gleichzeitigkeit (für die Beobachter) Koordinatenlinien sind. Wie lautet die Minkowski-Metrik in diesen Koordinaten?
Lösung: $ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2$.

Aufgabe 9
Eine (unendlich ausgedehnte, unendlich dünne) ebene Platte erzeugt gemäß der Newtonschen Theorie in den beiden durch sie getrennten Halbräumen jeweils ein konstantes Gravitationsfeld. Die Schwerebeschleunigung auf der Platte habe den Betrag g. Stellen Sie die relativistische Version dieser Feldkonfiguration durch "Aneinanderkleben" zweier Gebiete des Minkowskiraums dar. Ist die so erhaltene Raum-Zeit noch der Minkowskiraum?

Aufgabe 10
Führen Sie in der Raum-Zeit aus Aufgabe 9 globale Koordinaten τ, $\tilde{\xi}$ ein, indem Sie die ξ-Koordinaten in den beiden Halbräumen geeignet zu einer globalen raumartigen Koordinate $-\infty < \tilde{\xi} < \infty$ zusammenfassen (die Platte soll in $\tilde{\xi} = 0$ liegen). Wie lautet die Metrik in diesen globalen Koordinaten? Zeigen Sie, dass sie am Ort der Platte nicht stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 11
Zeichnen Sie die Weltlinie eines frei fallenden Teilchens, das mit der Platte nur gravitativ wechselwirkt, a) in lokalen kartesischen Koordinaten, b) im Koordinatensystem aus Aufgabe 10.

Aufgabe 12
Rechnen Sie explizit nach, dass $g_{ik}(x)\dot{x}^i\dot{x}^k$ eine Konstante der geodätischen Bewegung ist, sofern sich die Ableitung auf einen affinen Parameter bezieht.

Aufgabe 13
Bedeutung des affinen Parameters für Nullgeodäten: Zeigen Sie, dass die zurückgelegte Weglänge (gemessen von einem inertialen Beobachter) einen affinen Parameter für ein masseloses Teilchen im Minkoskiraum darstellt. Wie ist diese Aussage für eine allgemeine Raum-Zeit zu modifizieren?.

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kl}\dot{x}^i\dot{x}^k = \kappa(x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots)\dot{x}^i$$

mit einer beliebigen Funktion κ eine Geodäte beschreibt, wobei die Ableitung sich auf einen Parameter λ bezieht. Bestimmen Sie zu diesem Zwecke unter Verwendung von κ einen affinen Parameter $\tau = \tau(\lambda)$.