You are expected to cross three problems amongst exercises 19, 20, 21 and 22. You are strongly encouraged to attempt more.

21 **Time dilation**: Let X be an inertial observer with four-velocity u, and let X' be an inertial observer with four-velocity w. Calculate the intersection of the surface of simultaneity $t' = \text{const}$ of X' with the time-axis of X; call the corresponding time coordinate t. Show that $t = \gamma^{-1} t'$.

Calculate, next, the intersection of the surface of simultaneity $t = \text{const}$ of X with the time-axis of X'; call the corresponding time coordinate t'. Show that $t' = \gamma^{-1} t'$.

Conclude that every observer “sees” the time of the other as flowing slower than his (since $\gamma^{-1} < 1$).

21 DF **Zeitdilatation**: Gegeben sei ein inertialer Beobachter X mit Vierergeschwindigkeit u. Ein weiterer inertialer Beobachter X' habe die Vierergeschwindigkeit w. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Ebenen der Gleichzeitigkeit $t' = \text{const}$ von X' mit der Zeitachse von X. Dabei soll t die Zeitkoordinate dieser Schnittpunkte bezeichnen. Zeigen Sie, dass $t = \gamma^{-1} t'$.

Berechnen Sie umgekehrt die Schnittpunkte der Ebenen der Gleichzeitigkeit $t = \text{const}$ von X mit der Zeitachse von X'. Bezeichnen Sie mit t' die Zeitkoordinate dieser Schnittpunkte. Zeigen Sie, dass $t' = \gamma^{-1} t$.

Folgerung: Jeder der beiden Beobachter “sieht” die Zeit des anderen langsamer ablaufen (weil $\gamma^{-1} < 1$).

22 a) Relative to an observer X (with coordinates $\{t, \vec{x}\}$) the world line of a particle is described by

$$(-1,1) \ni \lambda \mapsto x^\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda \\ 1 + \lambda^2 \sin\lambda \\ \lambda^2 \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Compute the three-velocity $\vec{v}(t)$ of the particle. What is its four-velocity. (Why has the assumption $\lambda \in (-1,1)$ been imposed rather than e.g. $\lambda \in \mathbb{R}$?)

b) A particle moves on a circular path with radius r; let ω be its angular frequency. (Some care is needed here. Why?) Determine the world line of the particle. Parameterize the world line by the proper time. Compute the four-velocity as well as the four-acceleration of the particle.

22 DF a) Bezüglich eines Beobachters X (mit Koordinaten $\{t, \vec{x}\}$) sei ein Teilchen beschrieben durch die Weltlinie

$$(-1,1) \ni \lambda \mapsto x^\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda \\ 1 + \lambda^2 \sin\lambda \\ \lambda^2 \cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Dreiergeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Teilchens. Geben Sie die Vierergeschwindigkeit des Teilchens an. (Warum ist $\lambda \in (-1, 1)$ vorausgesetzt und nicht z.B. einfach $\lambda \in \mathbb{R}$?)

b) Ein Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius r; die Kreisfrequenz sei ω. (Hier muss man aufpassen. Warum?) Geben Sie die Weltlinie des Teilchens an. Parametrisieren Sie dann die Weltlinie nach der Eigenzeit. Berechnen Sie die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung.

23 Derive the conditions on the constant vectors $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ and k^μ so that the fields

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ik_\mu x^\mu} \text{ and } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{ik_\mu x^\mu}$$

satisfy the source-free Maxwell equations.

24 An astronomer observes four stars $S_1, \ldots S_4$ and makes a note of their angular distances θ_{ij} between S_i und S_j for all i, j. Show that the quantity

$$\frac{(1 - \cos\theta_{12})(1 - \cos\theta_{34})}{(1 - \cos\theta_{13})(1 - \cos\theta_{24})}$$

is independent of the state of motion of the astronomer.

24 DF Ein Astronom beobachtet vier Sterne $S_1, \ldots S_4$ und notiert deren Winkelabstände, also θ_{ij} zwischen S_i und S_j für alle i, j. Zeige, dass die Größe

$$\frac{(1 - \cos\theta_{12})(1 - \cos\theta_{34})}{(1 - \cos\theta_{13})(1 - \cos\theta_{24})}$$

unabhängig ist vom Bewegungszustand des Astronomen.

25 Let u be a lightlike vector and v a causal vector, consistently time-oriented. Prove

$$\eta(u, v) \leq 0,$$

with equality when v and u are proportional.