As a rule, the problem sheets will be in English, with an occasional German translation available.

You are expected to prepare solutions, and cross in the "Kreuzerl-Liste", up to three problems out of the list below.

We will write x for (x^1, x^2, x^3).

[*Reminder:* The Galilean transformations read

$$t' = t \tag{1}$$
$$x' = R(x - vt) + c\,; \tag{2}$$

where v is the velocity vector, R an orthogonal Matrix, and c is a translation vector. (In components: $t' = t$, $x^{i\,\prime} = R^i{}_j(x^j - v^j t) + c^i$.]

1 a) Show by a direct calculation that Newton's law,

$$\ddot{x}(t) = 0\,,$$

is invariant under Galilean transformations.

b) Show that the Galilean transformations form a group.

[German version: a) Schreiben wir x für (x^1, x^2, x^3). Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass das Newton'sche Gesetz

$$\ddot{x}(t) = 0$$

invariant unter Galilei-Transformationen ist. Erinnerung: Die Galilei-Transformationen lauten

$$t' = t \tag{3}$$
$$x' = R(x - vt) + c\,; \tag{4}$$

v ist der Geschwindigkeitsvektor, R eine orthogonale Matrix, und c ein Translationsvektor. (In Komponentenschreibweise: $t' = t$, $x^{i\,\prime} = R^i{}_j(x^j - v^j t) + c^i$.)

b) Zeigen Sie dass die Galilei-Transformationen bilden eine Gruppe.

2 The *harmonic oscillator equation*,

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \qquad (k > 0)\,, \tag{5}$$

describes the motion of an object of mass m attached to a spring.

Is this equation Galilei-invariant?

If not, how come? After all, (6) is the second Newton's law ($ma = F$), and therefore should be invariant under Galileo-transformations?

[German version: Die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \qquad (k > 0) \tag{6}$$

ist die Gleichung des harmonischen Oszillators; sie beschreibt die Bewegung eines Teilchens der Masse m unter Einwirkung einer Federkraft (à la Hooke).

Ist diese Gleichung Galilei-invariant?

Wie kann das sein, wenn nicht? Gleichung (6) ist doch einfach das 2. Newton'sche Gesetz ($ma = F$) und müsste daher Galilei-invariant sein?]

3 Recall that, in dimension three, a vector field X is a triplet of functions $X = (X^1, X^2, X^3)$. Show that for any vector field X we have

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \mathrm{grad}(\mathrm{div} X) - \Delta X \ ,$$

where grad is the gradient of a function: $\mathrm{grad} f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$; div is the divergence of a vector field $\mathrm{div} X := \partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3$; and $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ is the Laplace operator. Here $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. Finally $\nabla \times X$ is the curl of a vector field X:

$$\nabla \times X := \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z}\right)\mathbf{\hat{e}_1} + \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x}\right)\mathbf{\hat{e}_2} + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y}\right)\mathbf{\hat{e}_3} \ ,$$

where the $\mathbf{\hat{e}_i}$'s are the canonical basis vectors.

4 A matrix $A = (A^i{}_j)$ is called orthogonal if for all vectors $z = (z^i)$ we have

$$\sum_i (A^i{}_j z^j)^2 = \sum_i (z^i)^2$$

(the summation convention is used on the j-index). Show that the following statements are equivalent:

i. A is orthogonal,

ii. $A^t A = I$, where A^t is the transpose of A, and I is the identity matrix,

iii. $\sum_i A^i{}_j A^i{}_k = \delta_{jk}$, where δ_{jk} vanishes for j distinct from k, and equals one otherwise,

iv. $AA^t = I$,

v. $\sum_i A^j{}_i A^k{}_i = \delta^{jk}$, where δ^{jk} vanishes for j distinct from k, and equals one otherwise.

5 [Difficult; this is for self-study, and will not be discussed in class] Die Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar\partial_t\psi = -\hbar^2/(2m)\Delta\psi \ .$$

Als nichtrelativistische Gleichung müsste die Schrödinger-Gleichung Galilei-invariant sein. Zeige, dass dies tatsächlich der Fall ist, aber nur wenn man voraussetzt, dass $\psi(t, x)$ nicht wie ein Skalar transformiert, sondern gemäß

$$\psi'(t', x') = e^{-imvx/\hbar + imv^2 t/(2\hbar)} \psi(t, x) \,,$$

wobei wir hier der Einfachheit halber nur eine Raumdimension betrachten. (Also: $t' = t$, $x' = x - vt$, wo x und v eindimensional sind.) Hinweis: Man zeigt dann, dass

$$\left(i\hbar\partial_t + \hbar^2/(2m)\partial_x^2\right)\psi(t, x) = \left(i\hbar\partial_t + \hbar^2/(2m)\partial_x^2\right)\left(e^{miv/\hbar(x-vt/2)}\psi'(t'(t, x), x'(t, x))\right) = 0 \,,$$

wenn $\psi'(t', x')$ die "gestrichene" Schrödinger-Gleichung erfüllt. Was wird geschehen wenn man noch dazu eine Translation addiert?