

Relativitätstheorie und Kosmologie I

Helmut Rumpf
Gravitationsphysik, Fakultät für Physik
Universität Wien

Skriptum
erstellt unter Mitwirkung von
Manuel Grumet und Sadia Schülke

Wintersemester 2015

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	4
1	Relativitätsprinzipien	5
1.1	Grundlagen der klassischen Mechanik	5
1.2	Raum-Zeit	7
1.3	Relativität	9
1.4	Das minimale Relativitätsprinzip	12
1.5	Erste Konsequenzen: Kinematische Effekte der SRT	15
2	Lorentztransformationen	17
3	Kinematische Effekte der SRT: geometrische Herleitung	23
3.1	Relativität der Gleichzeitigkeit und Zeitordnung	23
3.2	Lorentzkontraktion	25
3.3	Zeitdilatation	26
3.4	Relativistische Geschwindigkeitsaddition	29
3.5	Thomasrotation	31
4	Geometrie der Raum-Zeit und Poincarégruppe	33
4.1	Metrik und Vierervektoren	33
4.2	Charakterisierung der Poincarégruppe $\mathcal{P}$	35
4.3	Struktur der Lorentzgruppe und Thomasrotation	37
5	Relativistische Punktmechanik	40
5.1	Kinematik	40
5.2	Elemente der relativistischen Dynamik	41
5.3	Masselose Teilchen und relativistische Wellenphänomene	45
5.4	Weitere Aspekte der relativistischen Dynamik	48
5.5	Kovektoren	51
6	Relativistische Kontinuumsmechanik	54
6.1	Felder, Hyperflächen, Integration	54
6.2	Dichten und Erhaltungsgrößen	59
6.3	Der Energie-Impuls-Tensor	62
6.4	Tensoren	66

7	Relativistische Elektrodynamik	70
7.1	Nachweis der Kovarianz	70
7.2	Energie-Impuls des Feldes	74
7.3	Strahlungsrückwirkung einer kompakten Stromverteilung	75
7.4	Strahlungsrückwirkung einer Punktladung	77
8	Relativistische Feldtheorien	81
8.1	Wirkungsprinzip und Noether-Theorem	81
9	Speziell-relativistische Gravitationstheorie	86
9.1	Lineare Feldtheorie der Gravitation	86
9.2	Post-Newtonsche Effekte der Gravitation	92
9.2.1	Rotverschiebung im stationären Gravitationsfeld	92
9.2.2	Lichtlaufzeitverzögerung (Shapiro-Effekt)	94
9.2.3	Lichtablenkung	94
9.3	Gravimagnetismus („gravitomagnetism“)	98
9.4	Allgemeine Lösung der linearisierten Einstein-Gleichungen	101

0 Einleitung

Relativitätstheorie: stellt einen Zusammenhang her zwischen Raum, Zeit und Gravitation.

Spezielle Relativitätstheorie (SRT): Kinematik der fundamentalen Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation zurückgeführt auf Geometrie der Raum-Zeit. Diese besitzt eine spezielle Symmetrie, d.h. es gibt ausgezeichnete Bezugssysteme. Grundlage der relativistischen Quantenfeldtheorie und ART.

Allgemeine Relativitätstheorie (ART): Einbeziehung der Gravitation erfordert Verallgemeinerung der Raum-Zeit-Geometrie. Beliebige Bezugssysteme mathematisch gleichberechtigt. Gravitation ist Dynamik der Raum-Zeit („Geometrodynamik“).

Vorlesungen:

- RTK I: SRT, Elemente der ART
- RTK II: ART und Kosmologie
- RTK III (Vertiefungsmodul): ausgewählte Kapitel aus ART und Kosmologie

Inhalt dieser Vorlesung:

- einfachstes empirisch relevantes Modell der Raum-Zeit: *Minkowskiraum*
- seine Geometrie und seine Symmetriegruppe: *Lorentz-* bzw. *Poincarégruppe*
- relativistische Kinematik und ihre wichtigsten Effekte
- relativistische Mechanik
- relativistische Feldtheorien, insbes. klassische Elektrodynamik
- feldtheoretischer Zugang zur Gravitation, Grundlagen der ART

Nicht behandelt:

- Darstellungstheorie (relevant für Klassifikation der Felder und Elementarteilchen)

Mathematische Voraussetzungen:

- Kenntnis der Quadratwurzel, elementare lineare Algebra
- multilineare Algebra (Tensorrechnung) wird entwickelt

Physikalische Voraussetzungen:

- Grundbegriffe der Mechanik und Elektrodynamik

1 Relativitätsprinzipien

= Postulate über Struktur von Raum und Zeit als fundamentale physikalische Kategorien. Diese Fundamentalität wird heute zunehmend hinterfragt. In Quantentheorien der Gravitation existiert Raum und Zeit nicht bzw. nur im „klassischen Grenzfall“ (*emergent*).

Schon klassisch argumentierbar ist der „*Relationismus*“ (Huygens, Leibniz, Mach): Physikalisch sind nur die Relationen zwischen Objekten (z.B. Abstände). Raumkonzept ist nur nützlich für „Buchhaltung“, sollte in Formulierung der Mechanik vermieden werden, auch die Zeit sollte aus Relationen abgeleitet werden.

Philosophen neigen zur *substantialistischen* Raumauffassung (Raumpunkte behalten Identität über Zeit hinweg: Raum ist absolut), Physiker zum Relationismus (vergleiche Machsches Prinzip). Der absolute Raum der klassischen Mechanik ist eine didaktische Fiktion, die letztlich überflüssig ist und sich in der Relativitätstheorie als schlicht falsch herausstellt.

Analog ist es in der SRT didaktisch hilfreich, die Raum-Zeit als absolut aufzufassen (jeder Raum-Zeit-Punkt hat physikalische Identität). Dies ist jedoch in der ART nicht mehr haltbar (dort gilt Invarianz unter aktiven Diffeomorphismen => Raum-Zeit = Äquivalenzklasse von Mannigfaltigkeiten).

1.1 Grundlagen der klassischen Mechanik

1. Newtonsches Axiom (Galileisches Trägheitsgesetz): geradlinige (konstante Richtung), gleichförmige (in gleichen Zeiten gleiche Strecken) Bewegung => Raum und Zeit haben *affine* Struktur (3- bzw 1-dimensional).

2. Newtonsches Axiom:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{K}(\vec{x}),$$

genauer

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \delta^{ij} K_j$$

oder

$$m_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} = K_i$$

mit dem "Massentensor" $m_{ij} \equiv m \delta_{ij}$ (δ_{ij} sind die Komponenten des Inversen der durch δ^{ij} beschriebenen Einheitsmatrix, daher numerisch identisch mit δ^{ij}).

Kraft=1-Form, die die Arbeit für Transport des Punktteilchens entlang einer Linie $\mathcal{C}$ bestimmt: $W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} K_i dx^i$

Gleichsetzen mit dem *Vektor* der Beschleunigung nur möglich mit Hilfe einer *Metrik* (δ_{ij} in *kartesischem Koordinatensystem*).

$\Rightarrow$ Raum *euklidisch* (tatsächlich ist die Metrik nur bis auf einen Faktor bestimmt: $\delta_{ij} \rightarrow \lambda \delta_{ij}$, $m \rightarrow \frac{m}{\lambda}$ ändert nichts am 2. Axiom).

Die Definition der Beschleunigung $\frac{d\vec{v}}{dt}$ verwendet den affinen Parallelitätsbegriff.

3. Newtonsches Axiom:

$\vec{K}_{BA} = -\vec{K}_{AB}$ (Relation zwischen Kräften zum *selben* Zeitpunkt!)

Impliziert: Zeit ist *absolut*, jedem Ereignis eindeutige Zeit (bis auf universelle Reskalierung und Translation) zugeordnet.

Bemerkung: Als 1-dimensionaler affiner Raum hat die Zeit eine natürliche (bis auf multiplikative Konstante eindeutige) euklidische Metrik; tatsächlich $\exists$ ein fundamentales physikalisches Längen- und Zeitmaß, d.h. die Welt ist nicht skaleninvariant $\rightarrow \ddot{U}$

(Newton postuliert unnötig mehr: *Raum* ist *absolut* („Äther“, „Sensorium Dei“), dh. jeder Punkt bewahrt seine Identität in der Zeit $\Rightarrow$ Bewegung absolut).

Moderne Formulierung des 1. Axioms

geradlinig, gleichförmig - bezüglich welches Beobachters?

Hypothese: Für beliebig bewegten Beobachter gilt (lokal, d.h. im Kleinen, verifizierbar z.B. durch Winkelsumme eines Dreiecks) euklidische Struktur von Raum und Zeit (gilt auch in ART).

Bezugssystem = 3-dimensionales (lokal) kartesisches Koordinatensystem, das ein Beobachter mit sich führt (realisiert als starres Gitter oder zumindest Achsen aus orthogonalen starren Maßstäben), zusammen mit einem 1-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem für die Zeit. Zeit angezeigt von synchronisierten Uhren, die im räumlichen Koordinatensystem ruhen („*Uhrenfeld*“ vermeidet *Retardierungseffekte* durch endliche Geschwindigkeit der Signalausbreitung). Praktische *Synchronisation* durch langsamen Uhrentransport (eliminiert 1. Beschleunigungseffekte, 2. Geschwindigkeitseffekte unter einer vernünftigen Annahme $\rightarrow \ddot{U}$)

Bemerkung: Jedes Bezugssystem definiert ein Koordinatensystem, aber nicht umgekehrt.

1. Axiom (moderne Fassung):

$\exists$ Klasse von Bezugssystemen, in denen die kräftefreie Bewegung geradlinig gleichförmig ist.

Bezugssysteme in dieser Klasse heißen *Inertialsysteme* ($\exists$ kein absoluter Raum, aber absolute *Klasse* von Bezugssystemen $\Rightarrow$ *Beschleunigung* ist absolut)

1.2 Raum-Zeit

Raum-Zeit-Punkt = potentielles *Ereignis*, festgelegt durch 4 Koordinaten (t, x, y, z) . Natürliche topologische Struktur: $\mathbb{R}^4$ (Produkttopologie; definiert Stetigkeit von Funktionen auf der Raum-Zeit und von Abbildungen in die Raum-Zeit, z.B. Kurven) $\rightarrow$ „Raum-Zeit-Kontinuum“. Das ist noch keine *geometrische* Vereinheitlichung: 1. Newton legt zwar *4-dimensionale affine* Struktur nahe, die klassische Mechanik benötigt diese aber nicht.

Grafische Darstellung von „Geschichten“ (Ereignismengen) in *Raum-Zeit-Diagramm*:

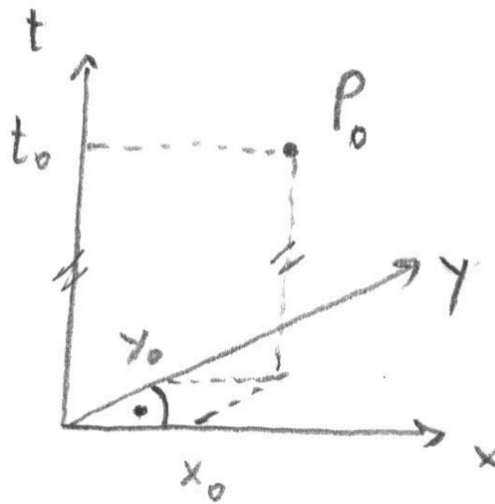


Abbildung 1.1: Raum-Zeit-Diagramm

Winkel der Zeitachse hat keine Bedeutung!

Geschichte eines Punktteilchens dargestellt durch eine *Weltlinie*: Abb. 1.2

Weltröhre (-zylinder) eines ausgedehnten Objekts: Abb. 1.3

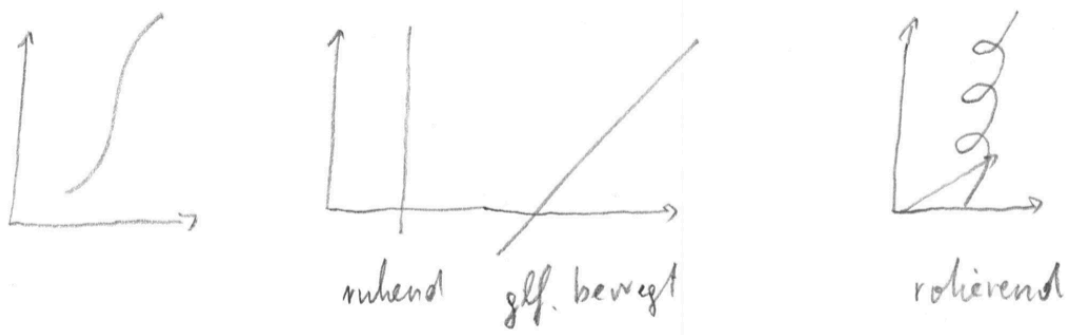


Abbildung 1.2: Weltlinien - ruhend, gleichförmig bewegt, rotierend



Abbildung 1.3: Weltröhre

1.3 Relativität

Definition: Eine physikalische Theorie erfüllt ein *Relativitätsprinzip*, wenn es eine nicht-triviale Klasse von Bezugssystemen gibt, in denen die Naturgesetze dieselbe Form annehmen (es gibt „gleichberechtigte“ Beobachter). Solche Bezugssysteme sind durch *Symmetrietransformationen* (spezielle Koordinatentransformationen) verbunden, bezüglich dieser sind Naturgesetze „*kovariant*“. Die Symmetrietransformationen bilden eine *Gruppe*, die durch *Invarianten* charakterisierbar ist.

Aristotelische Relativität

Es gibt einen absoluten Raum (in dem z.B. der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht) und eine absolute Zeit (angezeigt von ruhenden Uhren). Der Raum ist euklidisch $\Rightarrow$ homogen und isotrop, die Zeit affin und orientiert $\Rightarrow$ homogen und anisotrop. Die Raum-Zeit ist ein kartesisches Produkt $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}^\uparrow$.

Symmetrietransformationen: räumliche Translationen, Rotationen (auch Drehspiegelungen), Zeittranslationen.

Transformation der Koordinaten *eines* Ereignisses bezogen auf gleichberechtigte Bezugssysteme Σ und Σ' („passive“ Transformation):

$$\vec{x}' = \mathbb{R}\vec{x} - \vec{a}, \quad \mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{R} \dots \text{dreidimensionale orthogonale Matrix}$$

Aristotelische Transformationsgruppe:

$$E_3 \times T_1, \quad 3 + 3 + 1 = 7 \text{ Parameter}$$

$$E_3 = T_3 \ltimes O_3, \quad \ltimes \dots \text{semidirektes Produkt (der erste Faktor ist Normalteiler)}$$

Hier bedeuten E_3 die euklidische Bewegungsgruppe, O_3 die orthogonale Gruppe und T_3 die Translationsgruppe, jeweils in 3 Dimensionen.

Invarianten: Für jedes Ereignispaar P_1, P_2 mit Koordinaten $(t_1, \vec{x}_1)$ und $(t_2, \vec{x}_2)$ existiert ein eindeutiger (orientierter) zeitlicher Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$, insbesondere ist Gleichzeitigkeit absolut. Es existiert ein eindeutiger räumlicher Abstand $|\Delta \vec{x}| = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$. Die Invarianten Δt und $|\Delta \vec{x}|$ charakterisieren die aristotelische Symmetriegruppe.

Forminvariante Naturgesetze: z.B. freie Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \vec{x})$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} = R_i^k \frac{\partial}{\partial x'^k}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \psi'(t', \vec{x}') = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \psi'(t', \vec{x}') \quad \text{mit } \psi'(t', \vec{x}') = \psi(t(t'), \vec{x}(\vec{x}'))$$

Galileische Relativität

Inertialsysteme können relativ zueinander geradlinig gleichförmig bewegt sein $\Rightarrow$ Raum, Ruhe und Gleichortigkeit nicht mehr absolut (historisch ein großer Fortschritt). Die Zeit wird als absolut vorausgesetzt (die Zeit eines Ereignisses ist unabhängig vom Bezugssystem), aber es gibt keine natürliche Identifizierung zwischen den Räumen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten.

Mathematische Beschreibung: Raum-Zeit ist ein Faserbündel mit Basismannigfaltigkeit $\mathbb{R}^1$, Faser $\mathbb{E}^3$ und Strukturgruppe T_3^* (mengenmäßig sogar ein kartesisches Produkt, aber kein natürlicher Isomorphismus zwischen den Fasern).

Symmetrietransformationen:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \mathbb{R}\vec{x} - \vec{a} - \vec{v}t \\ t' &= t - b \end{aligned}$$

Reine Geschwindigkeitstransformationen:

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}t \\ t' &= t \end{aligned}$$

Galileigruppe:

$$(O_3 \rtimes (T_3 \times G_3)) \times T_1, \quad 3 + 3 + 3 + 1 = 10 \text{ Parameter}$$

$G_3 \dots$ abelsche Gruppe der Geschwindigkeitstransformationen

Invarianten: Relativ zueinander bewegte Uhren stimmen überein (evtl. bis auf konstante Verschiebung) $\Rightarrow$ zeitlicher Abstand Δt ist eindeutig für zwei beliebige Ereignisse, insbesondere ist Gleichzeitigkeit absolut. Räumlicher Abstand ist nur für *gleichzeitige* Ereignisse invariant definiert $\Rightarrow$ Gleichortigkeit ist *relativ*.

Die Galileigruppe ist charakterisiert durch:

* weil verschiedene inertielle Beobachter sich in der Beschreibung eines räumlichen Musters um eine zeitabhängige Translation (nicht Rotation) unterscheiden können

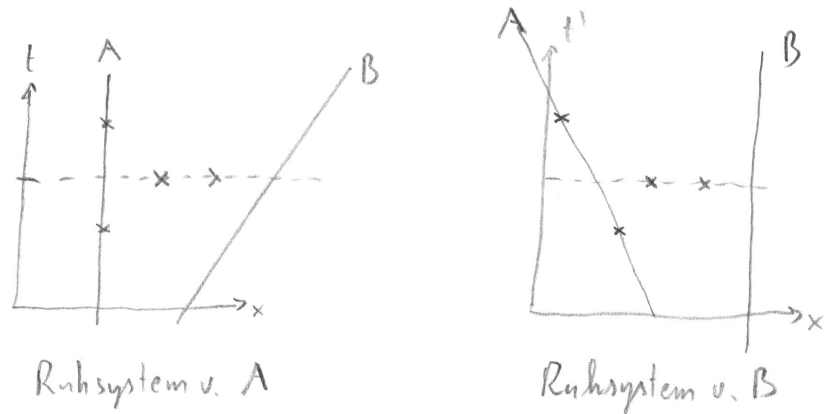


Abbildung 1.4: Relativität der Gleichortigkeit

- (i) geradlinig gleichförmig $\rightarrow$ geradlinig gleichförmig
- (ii) Invarianten Δt , $|\Delta \vec{x}|_{\Delta t=0}$ (alternativ: $\left| \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right|$ und Δt ; $\left| \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right|$ allein lässt noch $t \rightarrow \lambda t$, $\vec{x} \rightarrow \pm \lambda^2 \vec{x}$ zu)

Grafischer Zusammenhang zwischen geschwindigkeitstransformierten Bezugssystemen:

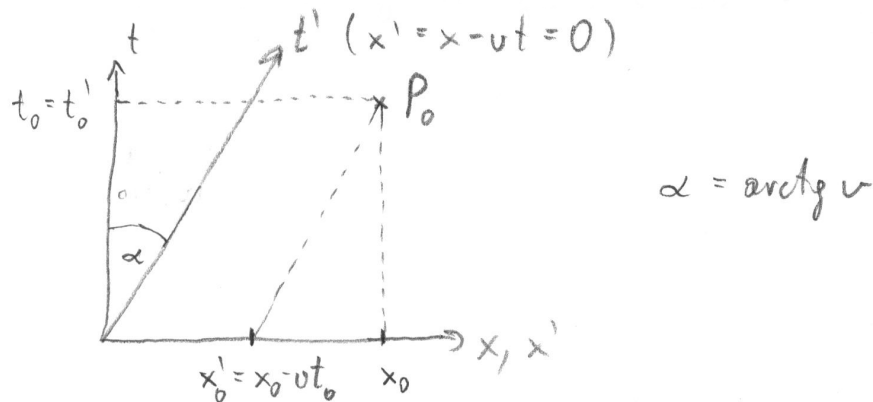


Abbildung 1.5: Geschwindigkeitstransformierte Bezugssysteme

Forminvariante Naturgesetze: Die Newtonsche Mechanik ist galileikovariant ($\rightarrow \ddot{U}$). Die Maxwellgleichungen sind nicht galileikovariant, weil c ausgezeichnet ist. ($\rightarrow$ Ätherhypothese, diese führte aber auf theoretische und experimentelle Widersprüche (Michelson-Morley-Experiment 1887: Lichtgeschwindigkeit isotrop trotz vermeintlicher Bewegung der Erde relativ zum Äther $\rightarrow \ddot{U}$)).

Einsteinsches Relativitätsprinzip (1905)

In allen Inertialsystemen hat die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit denselben Betrag c .

Transformationen, die $IS \rightarrow IS$ und Lichtgeschwindigkeit invariant lassen = Lorentztransformationen + Translationen, Symmetriegruppe = Poincarégruppe, 10 Parameter.

Die Forderung der Konstanz von c ist tatsächlich nicht notwendig: „*minimales Relativitätsprinzip*“: Transformation $I \rightarrow I'$ hänge stetig vom Geschwindigkeitsparameter $\vec{v}$ ab.

1.4 Das minimale Relativitätsprinzip

Fordern:

- (i) Ist I ein Inertialsystem, dann auch ein relativ zu I mit konstantem $\vec{v}$ bewegtes I' .
- (ii) Die Transformation von I auf I' ist stetig in $\vec{v}$.

Gedankenexperiment

Betrachten nur eine Raumdimension (x-Achse), zwei Inertialsysteme, I' relativ zu I mit v bewegt.

Behauptung: I ist relativ zu I' mit $-v$ bewegt (Geschwindigkeits-Reziprozität).

Beweis: Sei $\bar{v}$ die Geschwindigkeit von I relativ zu I'

$$\Rightarrow \bar{v} = f(|v|) \operatorname{sgn} v \quad (\text{mit } v \text{ ändert auch } \bar{v} \text{ die Richtung})$$

$$\bar{\bar{v}} = v \Rightarrow |f(|f(|v|)|)| = |v|$$

$\Rightarrow g \equiv |f|$ ist Involution^{*} auf $\mathbb{R}^+$, stetig, $g(0) = 0$.

Lemma: $\Rightarrow g = \operatorname{id}$. Beweis des Lemmas $\rightarrow \ddot{U}$.

$\Rightarrow f(|v|) = \pm |v|$, sinnvoll ist das Minuszeichen, weil eine Geschwindigkeitstransformation eine zeitabhängige Translation mit $\vec{a}(t) \propto \vec{v}$ darstellt, deren Umkehrung durch $-\vec{a}(t)$ beschrieben wird.

Haben zwar euklidische Strukturen in I und I' postuliert, nicht aber ihre Kompatibilität $\Rightarrow$ Länge eines Objekts kann von seiner Geschwindigkeit abhängen.

Definition: *Eigenlänge* = Länge im Ruhssystem.

Maßstab mit Eigenlänge L ruhe in I , ein solcher mit Eigenlänge $l < \bar{L}$ und $\bar{l} < L$ in I' . Punkt bewege sich relativ zu letzterem in I' mit u :

^{*} $g \circ g = \operatorname{id}$

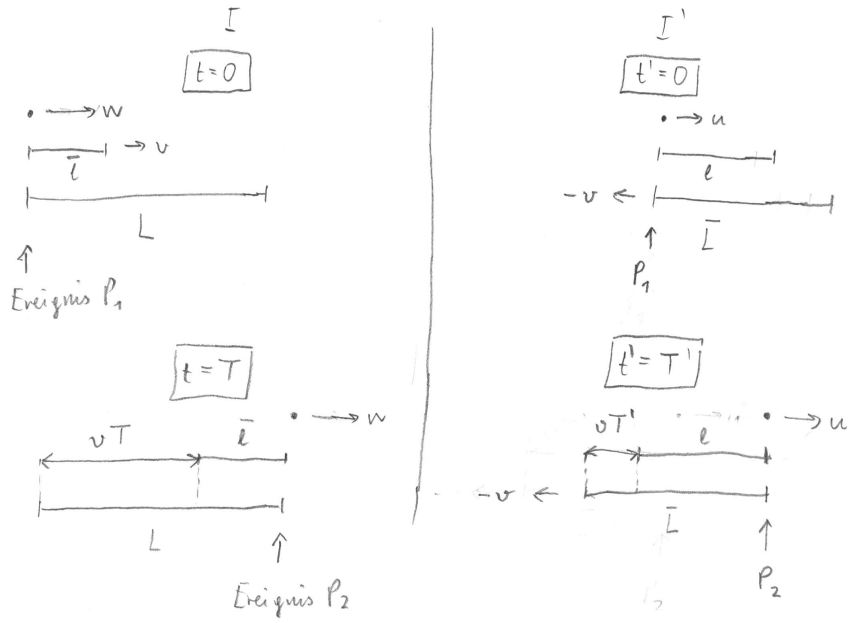


Abbildung 1.6: Das Gedankenexperiment

Aus Abb. 1.6 folgen die Relationen

$$\bar{l} = L - vT, \quad w = \frac{L}{T}$$

$$\bar{L} = l + vT', \quad u = \frac{l}{T'}$$

(Falls $\bar{L} < l$ ist T' negativ.)

Isotropie des Raumes (Links-Rechts-Symmetrie) $\Rightarrow \frac{\bar{l}}{l} = \frac{\bar{L}}{L} =: \alpha$

$$\alpha = \alpha(|v|)$$

hängt nicht von Ort und Zeit ab wegen Homogenität von Raum und Zeit, hängt nicht von l bzw. L ab: Betrachte Teilung des Maßstabs.

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha = \frac{L - vT}{l} = \frac{l + vT'}{L}$$

$$\Rightarrow vT = L - \alpha l \text{ und } vT' = \alpha L - l$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{\alpha L - l}{L - \alpha l} \quad (*)$$

$\neq 1$ falls $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ Inkompatibilität der euklidischen Strukturen gilt auch für Zeit.

$$u = \frac{l}{T'}, \quad v = \frac{\alpha L - l}{T'} \quad \Rightarrow \quad u + v = \frac{\alpha L}{T'}, \quad \frac{u}{v} = \frac{l}{\alpha L - l}$$

$$w = \frac{L}{T} \stackrel{(*)}{=} \frac{L}{T'} \frac{\alpha L - l}{L - \alpha l} = \frac{\alpha L}{T'} \frac{\alpha L - l}{\alpha(L - \alpha l)} = \frac{u + v}{1 + (1 - \alpha^2) \frac{u}{v}},$$

$$\text{weil } 1 + (1 - \alpha^2) \frac{u}{v} = 1 + (1 - \alpha^2) \frac{l}{\alpha L - l} = \frac{\alpha L - \alpha^2 l}{\alpha L - l}$$

3 Fälle:

1. $\alpha = 1 \Rightarrow$ Galileische Relativität ($\bar{L} = L, T' = T, w = u + v$)
2. $\alpha > 1 \Rightarrow w$ singulär (negativ) für $u \geq \frac{v}{\alpha^2 - 1}$, unphysikalisch $\rightarrow \ddot{U}$
3. $\alpha < 1$

Allgemein ist $w = \phi(v, u)$.

Geschwindigkeitsreziprozität (der lange Maßstab bewegt sich relativ zum Punktt. mit $-w$) $\Rightarrow -w = \phi(-u, -v)$ (setzt Inertialsystem voraus, in dem das Punktt. ruht!)

Links-Rechts-Symmetrie: können alle Vorzeichen ändern $\Rightarrow w = \phi(u, v)$

$$\Rightarrow (1 - \alpha^2) \frac{u}{v} \text{ symmetrisch in } u, v, \quad \alpha = \alpha(v)$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha^2(v)) \frac{u}{v} = (1 - \alpha^2(u)) \frac{v}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \alpha^2(v)}{v^2} = \frac{1 - \alpha^2(u)}{u^2} \equiv K \text{ weil } u \text{ und } v \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha^2 = K v^2,$$

$$K \equiv \frac{1}{c^2} \text{ universelle Konstante,}$$

c universelle Geschwindigkeit,

$$\text{oder } \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(Galilei: $K = 0$ bzw. $c \rightarrow \infty$)

1.5 Erste Konsequenzen: Kinematische Effekte der SRT

Längenkontraktion

$$\alpha = \frac{\bar{L}}{L} \Rightarrow \bar{L} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot L < L$$

Zeitdilatation

Wähle P_1 und P_2 am Ort einer stationären Uhr in $I' \Rightarrow l = 0 \xrightarrow{(*)} T' = \alpha T \Rightarrow$ eine bewegte Uhr geht langsamer, die von ihr angezeigten Zeitintervalle erscheinen gedehnt.

Zeitdilatation ist wie Längenkontraktion reziprok. ($\rightarrow \ddot{U}$)

Geschwindigkeitsaddition

$$w = \frac{u + v}{1 + (1 - \alpha^2) \frac{u}{v}} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

Ist $u = c \Rightarrow w = c \quad \forall v$

$\Rightarrow c$ ist *invariante* Geschwindigkeit $\rightarrow$ Einsteinsche Relativität (diese eine theoretische Konsequenz der Maxwellgleichungen und wird empirisch durch das Michelson-Morley-Experiment ($\rightarrow \ddot{U}$) nahegelegt)

(Beweis für beliebige Richtung später)

Bemerkung: Offenbar muss v (Relativgeschwindigkeit zwischen IS) $< c$ sein, sonst wird α imaginär. u (als Geschwindigkeit eines Phänomens (z.B. Scherenschnittpunkt oder Lichtfleck)) $> c$ ist sinnvoll und Geschwindigkeitsaddition ist auch in diesem Fall definiert: Ist $u = -\frac{c^2}{v}$, dann ist $w = \infty \quad \forall v > 0$; ist $u > c$, dann ist $w = -\infty$ für $v = -\frac{c^2}{u}$. $w = \infty$ und $w = -\infty$ bedeuten dasselbe. Werden sehen: Für materielle Objekte ist c unerreichbare *Grenzgeschwindigkeit* (folgt aus Dynamik).

Relativität der Gleichzeitigkeit

Falls P_1 und P_2 gleichzeitig in I' , ist $\bar{L} = l$ (und $u = \infty \Rightarrow w = \frac{c^2}{v}$)

$\Rightarrow L > \bar{L} = l > \bar{l} \Rightarrow P_2$ nach P_1 in I

Vergleiche Raum-Zeit-Diagramm:

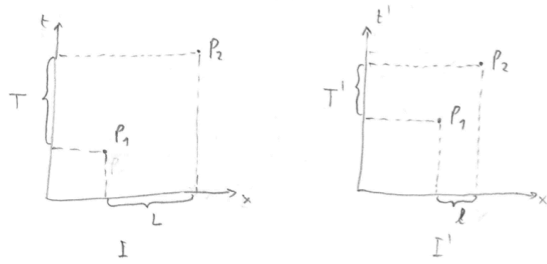


Abbildung 1.7: Raum-Zeit-Diagramm

Doppler-Effekt

monochromatische Welle: $\lambda\nu = c$

klassisch (longitudinal)

- a) Sender ruht im Medium, Empfänger radial mit v vom Sender weg.
 $\Rightarrow c_E = c - v \Rightarrow \underline{\nu_E} = c_E/\lambda = \frac{c}{\lambda}(1 - \frac{v}{c}) = \nu_S(1 - \frac{v}{c})$
- b) Empfänger ruht im Medium, Sender radial mit v vom Empfänger weg.
 $\Rightarrow \lambda_E = (c + v)\tau_S = \frac{c+v}{\nu_S}$ (Wellenlänge in Richtung zum Empfänger)
 $\Rightarrow \nu_E = c_E/\lambda_E = \frac{\nu_S}{1 + \frac{v}{c}}$

SRT: Fall b) mit Zeitdilatation

$$\nu_E = \nu_S \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_r}{c}} \equiv \delta \cdot \nu_S$$

v ... Relativgeschwindigkeit

v_r ... Radialkomponente von $\vec{v}$

δ ...Dopplerfaktor

Spezialfälle:

$v = v_r$ (longitudinaler Doppler-Effekt):

$$\nu_E = \nu_S \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

$v_r = 0$ (transversaler Doppler-Effekt):

$$\nu_E = \nu_S \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

nur Zeitdilatation.

2 Lorentztransformationen

Wähle P_1 in $\mathcal{O}$:

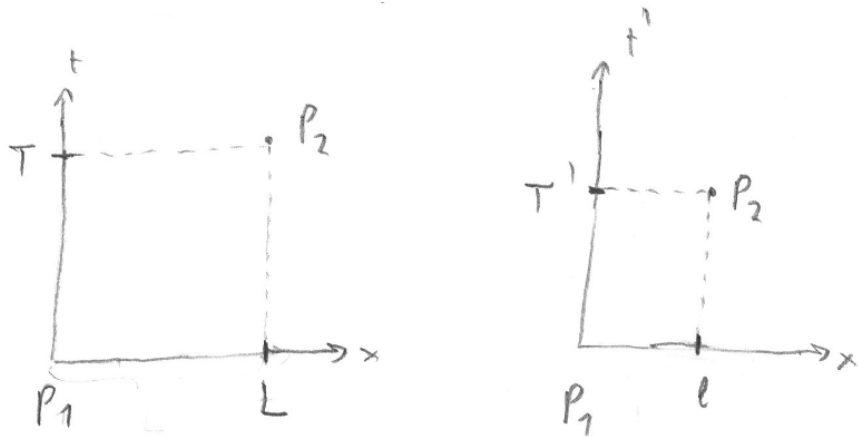


Abbildung 2.1: Bezugssysteme I und I' mit Punkten P_1 und P_2

$$L = \frac{l + vT'}{\alpha}$$

$$T = \frac{L - \alpha l}{v} = \frac{l + vT' - \alpha^2 l}{\alpha v} = \frac{T' + \frac{1}{v}(1 - \alpha^2)l}{\alpha}$$

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad t \equiv T, \quad x \equiv L, \quad t' \equiv T', \quad x' \equiv l$$

$$\Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma := \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Geschwindigkeitsreziprozität $\Rightarrow$ *Standard-Lorentztransformation*:

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

Transversale Koordinaten

Allgemeinster linearer Ansatz:

$$\vec{x}' = f\vec{x} + \vec{a}t + (\vec{b} \cdot \vec{x}) \vec{c}$$

$$t' = gt - \vec{d} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \propto \vec{v}$$

$\vec{v}$ in 1-Richtung:

$$y' = f(v)y$$

Invarianz unter Rotation um y-Achse um 180°:

$$f(v) = f(-v)$$

Reziprozität:

$$y = f(-v)y' \Rightarrow f^2 = 1 \stackrel{\text{stetig}}{\Rightarrow} f = 1 \Rightarrow$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Verallgemeinerung der Galileischen GT (nichtrelativistischer Limes NR: $c \rightarrow \infty$)

GT in beliebiger Richtung, Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$.

Zerlege $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$:

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v}$$

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} (\Rightarrow \vec{x}_{\perp} \cdot \vec{v} = 0)$$

$$(v, 0, 0) \rightarrow \vec{v}, \quad (x, 0, 0) \rightarrow \vec{x}_{\parallel}, \quad (0, y, z) \rightarrow \vec{x}_{\perp}$$

$$\Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} \right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x}'_{\parallel} + \vec{x}'_{\perp} = \gamma (\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}t) + \vec{x}_{\perp} = \vec{x} + (\gamma - 1) \vec{x}_{\parallel} - \gamma \vec{v}t = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v} - \gamma \vec{v}t$$

Spezielle Lorentztransformation mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ (*Lorentzboost* oder *Boost*).

Außerdem sind die aristotelischen Symmetrietransformationen, Raum- und Zeitspiegelung Symmetrien der Einsteinschen Relativität $\rightarrow$ Poincarégruppe, 10 Parameter. Die homogenen Transformationen (= Lorentztransformationen) bilden eine Untergruppe $\rightarrow$ Lorentzgruppe, erzeugt von Rotationen und Boosts, 6 Parameter.

Allgemeine = Poincarétransformationen.

c ist invariante Geschwindigkeit:

$$\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = c$$

Es gilt sogar

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \vec{x}')^2$$

für jedes Ereignispaar.

Beweis: o.B.d.A. $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \\ \Delta x' &= \gamma (\Delta x - v \Delta t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = \gamma^2 \left[(c^2 - v^2) (\Delta t)^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) (\Delta x)^2 \right] = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$\Rightarrow (\Delta s)^2 := c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ ist *invariantes Abstandsqadrat*, allerdings nicht positiv definit, induziert euklidische Geometrie von Raum und Zeit:

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{c^2} (\Delta s)^2 \Big|_{\Delta \vec{x}=0}$$

$$(\Delta l)^2 = -(\Delta s)^2 \Big|_{\Delta t=0}$$

Infinitesimal: $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 \rightarrow$ invariantes Linienelement ds . Offenbar auch invariant unter aristotelischer Gruppe $\Rightarrow$ alle Poincarétransformationen lassen ds^2 invariant. Invarianz von ds^2 charakterisiert sogar die Poincarégruppe ($\rightarrow$ 4.2).

Bemerkung:

$$\underbrace{\{\text{projektive Tr.}\}}_{\text{geradl. gleichf.} \rightarrow \text{geradl. gleichf. (24 Par.)}} \cap \underbrace{\{\text{konforme Tr.}\}}_{\text{lassen } c \text{ invariant (15 Par.)}} = \underbrace{\text{Poincarégr.} \times \text{Dilatationen}}_{(11 \text{ Par.})}$$

Raum und Zeit vereinheitlicht zu vierdimensionalem pseudoeuklidischem Raum (= *Minkowskiraum*), weder Raum noch Zeit für sich haben absolute Bedeutung. H. Minkowski 1908: „Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewahren“. Einsteins Reaktion: versteht eigene Theorie nicht mehr.

Relativistische Notation: $x^0 = ct$. Experimentell: c = Lichtgeschwindigkeit.

$c = 299792458$ m/s festgesetzt (Längenstandard zurückgeführt auf Zeitstandard).

Ab jetzt: meist $c = 1$, d.h. verwenden dieselbe Einheit für Länge und Zeit.

Grafische Darstellung der Standard-Lorentztransformation (Abb. 2.2):

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ t' &= \gamma(t - vx) \Rightarrow \text{x'-Achse: } t = vx \\ x' &= \gamma(x - vt) \Rightarrow \text{t'-Achse: } x = vt \\ v &= \tan \delta \end{aligned}$$

Winkel haben jetzt eine gewisse (wenn auch nicht die anschauliche rotationsinvariante) Bedeutung. Die neuen Achsen sind nur scheinbar schiefwinkelig. Wegen Linearität der Lorentztransformation werden Koordinatenabschnitte wie üblich projiziert, aber Maßeinheit nicht direkt ablesbar.

Bestimmung der Einheiten:

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$$

Gleichseitige Hyperbel statt Kreis im Euklidischen. Ü: Beweise die Parallelitäts-Relationen in Abb. 2.2.

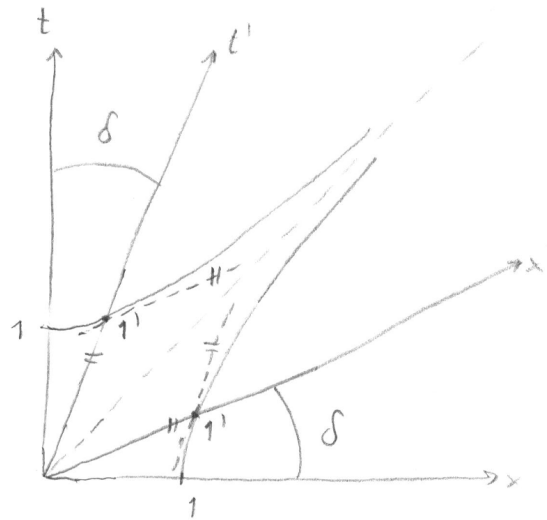


Abbildung 2.2: Standard-Lorentztransformation

Komplexifizierung:

$$t = i\tau \quad \Rightarrow \quad \tau^2 + x^2 = \tau'^2 + x'^2$$

(τ, x reelle Koordinaten für euklidischen Schnitt der komplexifizierten Raum-Zeit)

Euklidischer Abstand invariant unter Rotation:

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau \cos \varphi - x \sin \varphi & | \cdot i \\ x' &= \tau \sin \varphi + x \cos \varphi \end{aligned}$$

Analytische Fortsetzung im Parameter φ :

$$\varphi = -i\chi$$

$$\begin{aligned} t' &= t \cosh \chi - x \sinh \chi \\ x' &= -t \sinh \chi + x \cosh \chi \end{aligned}$$

$$\chi = \text{Artgh } v \quad \dots \quad \text{„Rapidity“}$$

$\Rightarrow$ Lorentz-Transformation entspricht Drehung um imaginären Winkel $\varphi = -i\chi$ in der komplexifizierten Raum-Zeit.

S. Hawking: „The world is Euclidean, but appears relativistic.“

Diese Beschreibung ist nützlich für die QFT im Minkowskiraum, hat aber keine Verallgemeinerung auf allgemeine Raum-Zeiten.

3 Kinematische Effekte der SRT: geometrische Herleitung

3.1 Relativität der Gleichzeitigkeit und Zeitordnung

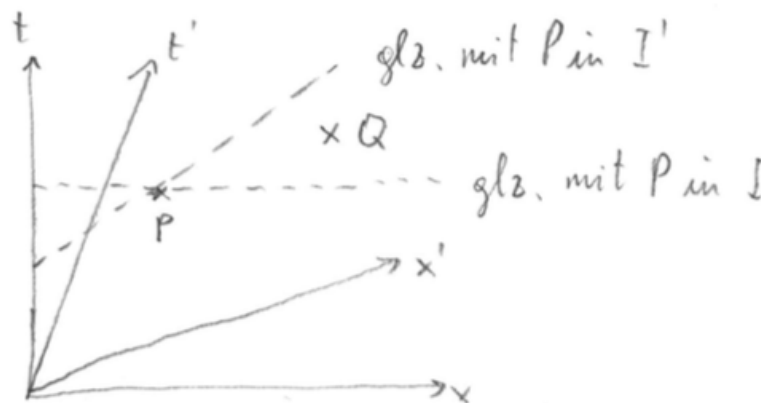


Abbildung 3.1: Q ist in I später, in I' früher als P

Die Relativität der Zeitordnung gilt allgemein für Ereignisse, die kausal getrennt sind.

Kausalität

Lorentztransformation für $|v| = 1$ singulär, γ für $v > 1$ imaginär.

Keine Interpretation für imaginäre Koordinaten. ($x = i\xi, t = i\tau \Rightarrow \xi$ zeitartig, τ raumartig)

$\Rightarrow$ Kein Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit $v \geq 1$

Objekte mit $v > 1$ a priori nicht ausgeschlossen, aber Signalübertragung mit $v > 1$ widerspricht der Annahme eines freien Willens. Sei z.B. $v_s = \infty$ (Signalgeschwindigkeit relativ zum Sender) $\Rightarrow$ Botschaft in eigene Vergangenheit möglich (siehe Abb. 3.2).

Tatsächlich ist die Kausalitätsverletzung schon mit $v_s = 1 + \epsilon$ möglich. (Ü)

Annahme: $c =$ Grenzgeschwindigkeit für kausale Wirkungen (Energie- oder Informationstransport) („Einstein-Kausalität“)

Beschleunigung von Unter- auf Überlichtgeschwindigkeit ist dynamisch nicht möglich $\rightarrow$ später.

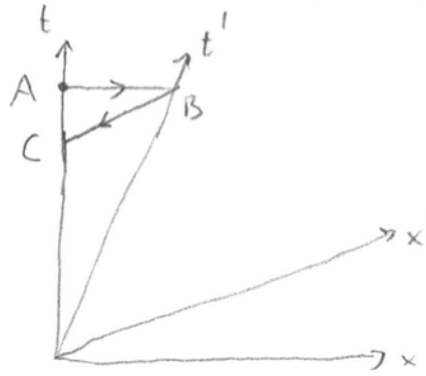


Abbildung 3.2: Botschaft in die eigene Vergangenheit

Tachyonen sind a priori möglich, aber die Energie ist nicht nach unten beschränkt $\Rightarrow$ eine Wechselwirkung mit ihnen ermöglicht ein perpetuum mobile 1. Art und macht die Welt instabil.

Folgerung: $\nexists$ starrer Körper

Bemerkung: Phasengeschwindigkeit ($\frac{\omega}{k}$), Gruppengeschwindigkeit ($\frac{d\omega}{dk}$) > 1 für elektromagnetische Wellen in Materie möglich, aber *Frontgeschwindigkeit* $= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega(k)}{k} \leq 1$ (relevant für die Ausbreitung einer Diskontinuität und damit Signalübertragung)

In der ART sind Überlichtgeschwindigkeit (in endlicher Entfernung) und Zeitmaschine klassisch nicht ausgeschlossen (letztere erfordert aber „exotische“ Materie, die vermutlich nicht existiert).

Die *Kausalstruktur* der Raum-Zeit ist bestimmt durch die Gesamtheit der Lichtkegel.

Definition: *Lichtkegel* von $P = \{Q : (\Delta s)^2 = 0\}$

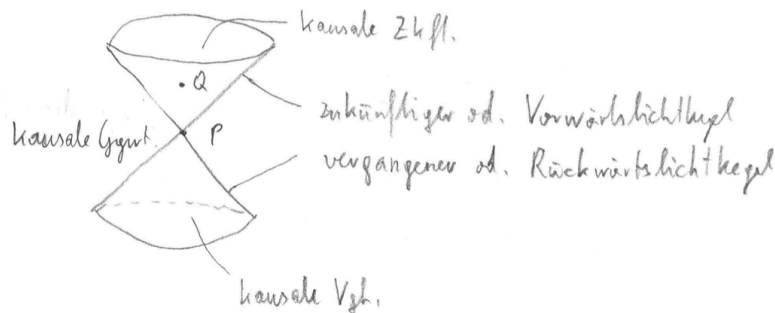


Abbildung 3.3: Lichtkegel von P

Der Lichtkegel ist realisierbar durch ein- und auslaufende Kugelwellenfronten. Punkte innerhalb des Lichtkegels sind mit dem Punkt P kausal verbunden. $\Rightarrow$ Zeitordnung ist invariant, die Punkte außerhalb von dem Punkt P sind kausal getrennt $= \exists$ keine

eindeutige zeitlich Ordnung relativ zu P . Jedes Ereignis in der kausalen Gegenwart ist mit P in einem gewissen Inertialsystem gleichzeitig.

3.2 Lorentzkontraktion

Betrachte einen relativ zu I bewegten Maßstab:

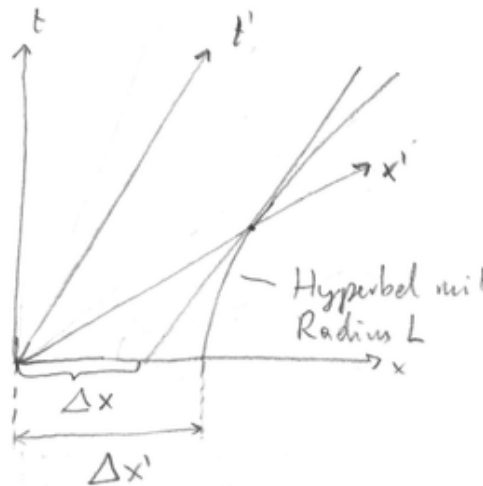


Abbildung 3.4: Lorentzkontraktion

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Δx gemessen zu $t = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta x' &= \gamma \Delta x \\ \Rightarrow \Delta x &= \gamma^{-1} \Delta x' = \sqrt{1 - v^2} \Delta x' \end{aligned}$$

$$L = \Delta x' > \Delta x = \bar{L}$$

Der Effekt ist reziprok, weil die Messvorschrift (Gleichzeitigkeit) systemabhängig ist. Der Effekt ist rein longitudinal (weil $y' = y, z' = z$). Die Lorentzkontraktion ist nicht unmittelbar beobachtbar wegen der *Retardierung* (c endlich). Z.B. ein transversal zum Beobachter bewegter Würfel in großer Entfernung (sehen von abbildendem System ab, bzw. jeder Strahl steht für ein konvergentes Bündel):

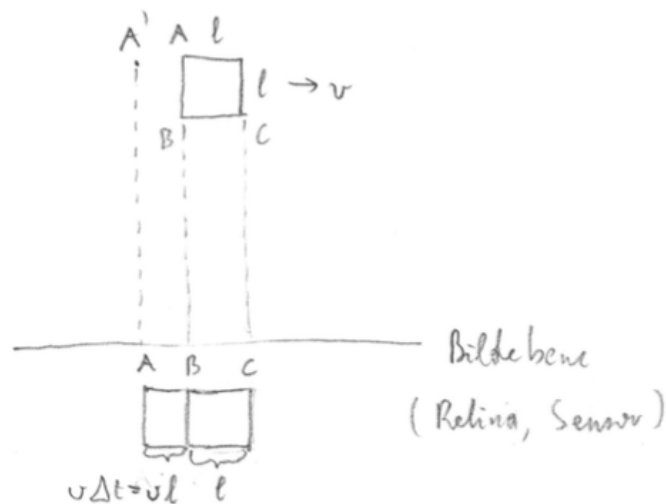


Abbildung 3.5: Würfel - Bild ohne LK

Bild ohne Lorentzkontraktion: $\Delta t = \frac{l}{c}$ Retardierung zwischen Vorder- und Hinterseite.



Abbildung 3.6: Würfel - Bild mit LK

Bild mit Lorentzkontraktion: $v = \sin \varphi, \sqrt{1-v^2} = \cos \varphi \Rightarrow$ Würfel erscheint um $\varphi = \arcsin(\frac{v}{c})$ verdreht!

Bei endlichem Abstand ist das Bild verzerrt.

3.3 Zeitdilatation

Eine Uhr ruht in $I' \Rightarrow \Delta x' = 0 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1-v^2}$

Eine Uhr ruht in $I \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta t' \sqrt{1-v^2}$

Grafischer Beweis: Abb. 3.7

Gangdifferenz:

$$T' = T + \Delta T = T \sqrt{1-v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{v^2}{2} \text{ für } v \ll 1$$

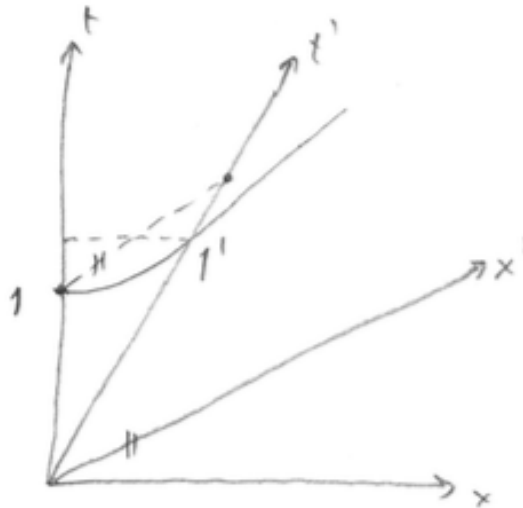


Abbildung 3.7: Grafischer Beweis der Zeitdilatation

Bei konstantem v ist $T = \frac{d}{v} \Rightarrow \Delta T \approx -\frac{d}{2}v \rightarrow 0$ f. $v \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ Synchronisation durch langsamen Uhrentransport über beliebig große Distanz d ist möglich.

Andere Möglichkeit: „Einstein-Synchronisation“ mit Lichtstrahlen:

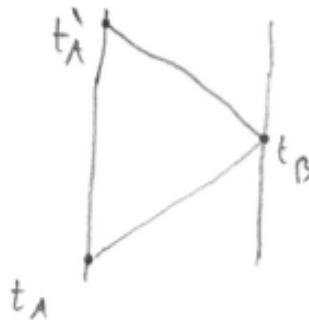


Abbildung 3.8: Einstein-Synchronisation

Betrachte zwei Uhren A und B in Ruhe relativ zueinander, und ein Lichtpuls von A nach B wird reflektiert $\Rightarrow t'_A - t_B = t_B - t_A \Rightarrow t_B = \frac{1}{2}(t_A + t'_A)$

Beliebig bewegtes Punktteilchen: Für jeden Punkt der Weltlinie $\exists$ ein *instantanes* Inertialsystem I' , in dem das Teilchen momentan ruht: Abb. 3.9

Die Bedeutung des Linienelements ds entlang der Weltlinie:

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2 = dt'^2 - d\vec{x}'^2 = dt'^2$$

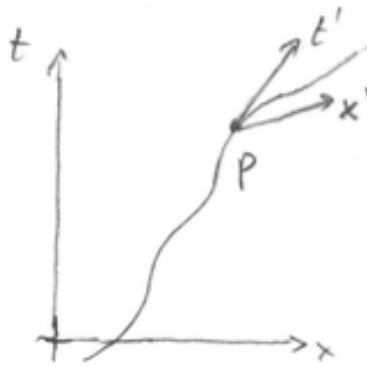


Abbildung 3.9: t' -Achse ist tangential an die Weltlinie in P

$\Rightarrow ds$ ist das von einer Uhr im instantanen Inertialsystem angezeigte Zeitintervall.

Uhrenhypothese: Eine Beschleunigung hat keinen Einfluss, definiert eine „ideale Uhr“
 $\Rightarrow ds$ ist das *Eigenzeitelement* einer idealen Uhr. *Bemerkung:* Die Uhrenhypothese ist annähernd erfüllt, wenn innere Kräfte sehr viel größer sind als die beschleunigende Kraft. Nicht ideale Uhren können mit Korrekturalgorithmus verbessert werden ($\rightarrow \ddot{U}$)

In einem fixen Inertialsystem ist die Eigenzeit eines bewegten Objekts $ds = \sqrt{1 - v^2} dt \Rightarrow$ bewegte Uhren gehen langsamer.

Geometrische Bedeutung: Eigenzeit = Länge (i.S.d. Minkowskigeometrie) $\Rightarrow$ Gerade = längste Verbindung zwischen zwei kausal verbundenen Punkten, z.B.:



Abbildung 3.10: Gerade

$$\Delta s_1 < \Delta s_2$$

Zwillingsparadoxon

Siehe Abb. 3.11:

$$T_2 = T_1 \sqrt{1 - v^2}$$

① und ② sind nicht gleichberechtigt, weil ② beschleunigt ist (kein Inertialsystem)! Die Beschleunigung selbst hat beliebig wenig Einfluss auf T_2 , ermöglicht aber die Rückkehr von ② zu ①.



Abbildung 3.11: Zwillingsparadoxon

Experimentelle Tests der Zeitdilatation:

1938 (Ives und Stilwell) Erster Nachweis durch Spektroskopie von Molekülstrahlen (klass. Dopplereffekt und Lorentzfaktor)

1940 Myonen (erzeugt von kosmischer Strahlung in oberer Atmosphäre) erreichen Erdoberfläche, obwohl Halbwertszeit zu kurz ist ($v = 0.994c$)

1973 (Hafele und Keating) Atomuhr im Flugzeug

-1979 μ -Speicherring (CERN): $\gamma = 29.3, b \sim 10^{18}g$, verifiziert SRT bis auf 10^{-3}

2010 „Atomuhr“ (Al-Ion) mit $10m/s$

2011 Laserspektroskopie schneller Ionen: $\gamma = \gamma_{SR}(1 + \alpha\beta^2 + \alpha_2\beta^4) \rightarrow |\alpha| \leq 8 \cdot 10^{-8}, |\alpha_2| \leq 1.2 \cdot 10^{-5}$

GPS würde ohne Berücksichtigung der Zeitdilatation nicht funktionieren, benötigt außerdem die ART.

3.4 Relativistische Geschwindigkeitsaddition

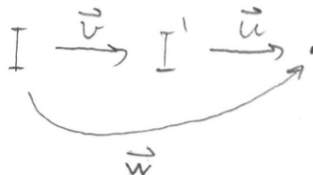


Abbildung 3.12: Geschwindigkeitsaddition

Umkehrung der Lorentztransformation ($\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$):

$$t = \gamma(t' + \vec{v} \cdot \vec{x}')$$

$$\vec{x} = \vec{x}' + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x}') + \gamma \vec{v} t'$$

$\vec{x}' = \vec{u}t'$ einsetzen $\rightarrow$

$$\vec{x} = \left[\vec{u} + \frac{\gamma-1}{v^2}(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \gamma\vec{v} \right] t', \quad t = \gamma(1 + \vec{v} \cdot \vec{u})t'$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{x}}{t} = \frac{\frac{\vec{u}}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma v^2}\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \vec{v}}{1 + \vec{v} \cdot \vec{u}} \quad (= \frac{\vec{v} + \vec{u} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{u})}{1 + \vec{v} \cdot \vec{u}}).$$

Dies ist das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem.

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma v^2} = \frac{\gamma}{\gamma+1}, \text{ weil } \gamma^2 - 1 = \gamma^2 v^2 \right)$$

Bemerkung: Widerspruch zur Reziprozität $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rightarrow -\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$?

Hier stellt sich die Frage nach der *Orientierung* eines mit dem Objekt bewegten Inertialsystems. Tatsächlich ist $-\vec{w}$ durch $\mathbb{R}\vec{w}$ mit einer gewissen Rotation $\mathbb{R}$ zu ersetzen $\rightarrow$ später.

$\vec{w}$ ist nicht symmetrisch in $\vec{v}$ und $\vec{u}$, außer $\vec{v} \parallel \vec{u}$, (weil Boosts keine Untergruppe sind $\rightarrow$ später). $\vec{w} = \vec{w}(\vec{v}, \vec{u}) =: \vec{v} \diamond \vec{u}$ ist weder kommutativ noch assoziativ. (Ü: Zeige Nichtassoziativität)

Spezialfälle:

1. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{1 + \vec{v} \cdot \vec{u}}$
2. $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} + \frac{1}{\gamma}\vec{u}$ (nur Zeitdilatation)

3.5 Thomasrotation

Betrachte 4 Inertialsysteme:

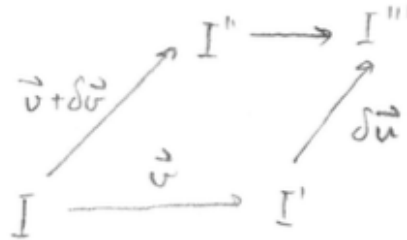


Abbildung 3.13: Zur Thomasrotation

Jeweils ein Boost (drei Boosts), $|\delta \vec{v}| \ll |\vec{v}|$ und $\delta \vec{u}$ so gewählt, dass $\vec{v} + \delta \vec{v} = \vec{v} \diamond \delta \vec{u}$

o.B.d.A. $\vec{v} = (v, 0, 0)$ in I , $\delta \vec{u}, \delta \vec{v}$ in (x, y) -Ebene.

Betrachte ruhendes Dreieck in I mit den Seiten $||\vec{v}, \delta \vec{v}, \vec{v} + \delta \vec{v}$

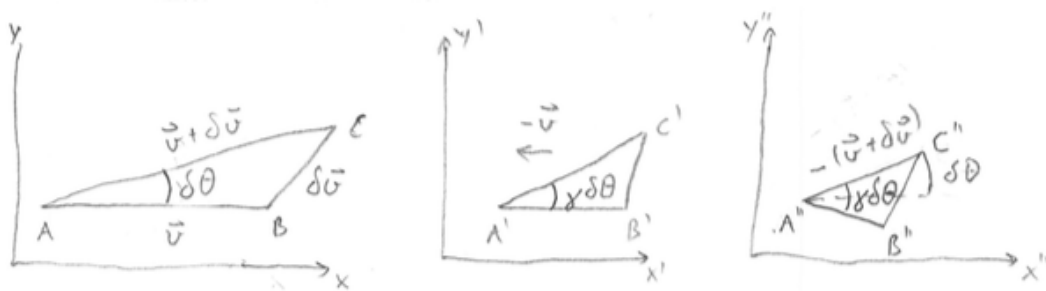


Abbildung 3.14: Zur Thomasrotation

$$\gamma(\vec{v} + \delta \vec{v}) \approx \gamma(\vec{v})$$

Das Dreieck in I'' ist im Vergleich zu I' um $(1 - \gamma)\delta\Theta$ verdreht.

Betrachte jetzt Boost bezüglich I' mit $\delta \vec{u}$ auf I'''

$\Rightarrow$ in I''' ist das Dreieck gegenüber I' nicht verdreht $\Rightarrow I'''$ gegen I'' um $\delta\Theta_T = -(\gamma - 1)\delta\Theta$ verdreht.

Ein Körper werde beliebig beschleunigt, aber in seinem Ruhesystem nicht rotiert (Abfolge von inf. Boosts $I' \rightarrow I'''$) $\Rightarrow$

Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_T = \frac{d\Theta_T}{dt} = -(\gamma - 1) \frac{d\Theta}{dt}$$

Nur in einer Abfolge von bezüglich I einfach geboosteten Inertialsystemen ($I' \rightarrow I''$) findet eine reine Rotation statt, in einem fixen Inertialsystem eine zeitabhängige Drehstauchung. Im instantanen Inertialsystem (I') gibt es keine Drehung.

$$|\delta\Theta| = \frac{|\vec{v} \times (\vec{v} + \delta\vec{v})|}{|\vec{v}| |\vec{v} + \delta\vec{v}|} = \frac{|\vec{v} \times \delta\vec{v}|}{v^2}$$

Drehvektor: $\delta\vec{\Theta} = \frac{\vec{v} \times \delta\vec{v}}{v^2}$

Thomas-Präzession:

$$\Rightarrow \vec{\omega}_T = -(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{v^2}.$$

$$\gamma - 1 \xrightarrow{(v \rightarrow 0)} \frac{v^2}{2} \Rightarrow \vec{\omega}_T \xrightarrow{(v \rightarrow 0)} 0 \Rightarrow$$

Im instantanen Inertialsystem ist die Thomasfrequenz 0, vergleiche die letzte Bemerkung. Kein inertialer Beobachter misst $\vec{\omega}_T$ direkt! Die praktische Realisierung eines nichtrotierenden Bezugssystems: Wähle Symmetrieachsen rotierender Kreisel als Koordinatenachsen.

4 Geometrie der Raum-Zeit und Poincarégruppe

4.1 Metrik und Vierervektoren

Ereignis $P \leftrightarrow$ kartesische Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^i) = (x^0, \vec{x})$

Für jedes Paar P, Q mit Koordinaten x, y existiert ein *Verbindungsvektor* $\vec{PQ}$ mit Komponenten $y - x \rightarrow$ affine Struktur

Die Menge der Verbindungsvektoren ist ein vierdimensionaler Vektorraum mit indefiniter *Metrik*:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2 \equiv (\Delta x)^2 \quad (\text{„Viererquadrat“ von } \Delta x) \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 \eta_{ik} \Delta x^i \Delta x^k \\ &= \eta_{ik} \Delta x^i \Delta x^k \quad (\text{Einsteinsche Summenkonvention}) \end{aligned}$$

$$\eta = (\eta_{ik}) = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \text{ „metrischer Tensor“}$$

definiert *Minkowskimetrik* (pseudoeuklidisch)

Minkowskiraum = vierdimensionaler affiner Raum mit Minkowskimetrik ist das mathematische Modell der Raum-Zeit in der SRT.

Metrik definiert *Skalarprodukt* zweier Vektoren u, v :

$$uv = \frac{1}{2} [(u+v)^2 - u^2 - v^2] = \eta_{ik} u^i v^k = u^0 v^0 - \vec{u} \cdot \vec{v} = vu$$

(„Viererprodukt“), ist nicht entartet: $uv = 0 \forall v \Rightarrow u = 0$

Transformationsverhalten unter Poincaré-Transformation:

$$x'^i = L^i_k x^k - a^i \Rightarrow \Delta x'^i = L^i_k \Delta x^k$$

$u = (u^i)$ heißt *Vierervektor* wenn $u'^i = L^i_k u^k$

$u'^2 = u^2 \Rightarrow u'v' = uv$: Skalarprodukt *invariant*

u, v heißen (Minkowski-) *orthogonal*, falls $uv = 0$

u heißt

- *zeitartig*, falls $u^2 > 0$
- *lichtartig*, falls $u^2 = 0$
- *raumartig*, falls $u^2 < 0$

Zeitorientierung für nicht-raumartige Vektoren:

- $u^0 > 0$: u zukunftsgerichtet
- $u^0 < 0$: u vergangenheitsgerichtet

Zeitorientierung ist invariant unter Lorentztransformationen, die den Zeitsinn nicht ändern (d.h. t' wächst monoton mit t)

Beweis: es genügt Boost zu betrachten (Rotation ändert offenbar Zeitsinn nicht):

$$u'^0 = \gamma (u^0 - \vec{v} \cdot \vec{u}) > 0, \text{ wenn } u^0 > 0,$$

da $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v}| |\vec{u}| < |\vec{u}| \leq u^0$, da u nicht raumartig

Normalform eines zeitartigen Vektors: $u' = (\pm\sqrt{u^2}, \vec{0})$, stets durch Lorentztransformation zu erreichen (lege t' -Achse parallel zu u)

Normalform eines raumartigen Vektors: $u' = (0, \sqrt{-u^2}, 0, 0)$ (lege x' -Achse parallel zu u , dazu i.A. Rotation und Boost notwendig)

Normalform eines lichtartigen Vektors: $u' = (\pm 1, 1, 0, 0)$ (zunächst Rotation auf $(\pm a, a, 0, 0)$, dann Standard-Lorentztransformation:

$$u'^i = \lambda u^i, \quad \lambda = \gamma(1 \mp v) = \sqrt{\frac{1 \mp v}{1 \pm v}}.$$

Ist $v \perp u$ und u zeitartig $\Rightarrow v$ raumartig

Ist $v \perp u$ und u lichtartig $\Rightarrow v$ raumartig oder lichtartig (dann $v = \lambda u$)

4.2 Charakterisierung der Poincarégruppe $\mathcal{P}$

Behauptung:

$$\mathcal{P} = \left\{ f \mid x'^i = f^i(x), \eta_{ik} dx^i dx^k = \eta_{ik} dx'^i dx'^k \right\}$$

d.h. Poincarétransformationen = *Isometrien* der Raum-Zeit, Gruppeneigenschaft trivial

Beweis:

$$\eta_{mn} \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \frac{\partial f^n}{\partial x^k} = \eta_{ik} \quad \left| \quad \frac{\partial}{\partial x^j} \right.$$

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial f^m}{\partial x^i} \right) = \pm 1 \Rightarrow f \text{ invertierbar}$$

$$\eta_{mn} \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial f^n}{\partial x^k} + \frac{\partial f^m}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^j \partial x^k} \right) = 0 \quad (ijk) \quad (\text{I})$$

$$\eta_{mn} \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial f^n}{\partial x^j} + \frac{\partial f^m}{\partial x^k} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0 \quad (kij) \quad (\text{II})$$

$$\eta_{mn} \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial f^n}{\partial x^i} + \frac{\partial f^m}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^k \partial x^i} \right) = 0 \quad (jki) \quad (\text{III})$$

(f zwei mal stetig differenzierbar, $\eta_{mn} = \eta_{nm}$)

$m \leftrightarrow n$ in (III) und (II)₂, I + II - III $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \eta_{mn} \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial f^n}{\partial x^k} + \frac{\partial f^n}{\partial x^k} \frac{\partial^2 f^m}{\partial x^i \partial x^j} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\eta_{mn} \frac{\partial f^n}{\partial x^k}}_{A_{mk}} \frac{\partial^2 f^m}{\partial x^i \partial x^j} &= 0 \end{aligned}$$

(A_{mk}) invertierbar, da $\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^k} \right)$ invertierbar $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 f^m}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \equiv L^i_k \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow x'^i = f^i(x) = L^i_k x^k + c^i \text{ affine Transformation}$$

$$L = (L^i_k) = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{M} \end{pmatrix}$$

$$\eta_{mn} L^m_i L^n_k = \eta_{ik} \Rightarrow L^T \eta L = \eta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\vec{b}^T \\ -\vec{a} & \mathbb{M}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^T \\ -\vec{a} & -\mathbb{M}^T \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^T \\ \vec{a} & \mathbb{M}^T \end{pmatrix}$$

$$LL^{-1} = \text{id} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^T \\ \vec{a} & \mathbb{M}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - \vec{a}^2 = 1, \quad -\gamma \vec{b} + \mathbb{M} \vec{a} = 0 \quad (*)$$

Betrachten L^{-1} : $\vec{x}' = 0 \Rightarrow x^0 = \gamma x'^0, \vec{x} = \vec{a} x'^0$

$\Rightarrow$ räuml. Ursprung in I' relativ zu I mit $\vec{v} = \frac{\vec{x}}{x^0} = \frac{\vec{a}}{\gamma}$ bewegt

$$\gamma^2 - a^2 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{a}|}{\sqrt{1 + |\vec{a}|^2}} < 1$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|}{\sqrt{1 - v^2}} \Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Zerlege $L = L_{\mathbb{R}} L_{\vec{v}}$

$$\begin{aligned} L_{\vec{v}} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{v}^T \\ -\gamma \vec{v} & \mathbb{1} + \underbrace{\frac{\gamma^2}{1 + \gamma}}_{\frac{\gamma-1}{v^2}} \vec{v} \vec{v}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{a} & \mathbb{1} + \frac{\vec{a} \vec{a}^T}{1 + \gamma} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow L_{\mathbb{R}} &= L L_{\vec{v}}^{-1} = L L_{-\vec{v}} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^T \\ \vec{a} & \mathbb{1} + \frac{\vec{a} \vec{a}^T}{1 + \gamma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \vec{a}^2, & \gamma \vec{a}^T - \vec{a}^T - \frac{\vec{a}^2}{1 + \gamma} \vec{a}^T \\ -\gamma \vec{b} + \mathbb{M} \vec{a}, & -\vec{b} \vec{a}^T + \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\vec{a} \vec{a}^T}{1 + \gamma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbb{R} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

weil $\frac{\vec{a}^2}{1+\gamma} = \gamma - 1$, $\mathbb{M}\vec{a} = \gamma\vec{b}$. (*)

$$\left(-1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}\right) \vec{b}\vec{a}^T = -\frac{\vec{b}\vec{a}^T}{1+\gamma}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{M} - \frac{\vec{b}\vec{a}^T}{1+\gamma} \text{ ist } \textit{orthogonal},$$

weil unter $L_{\mathbb{R}} x^0 \rightarrow x^0$ und ds^2 invariant $\Rightarrow d\vec{x}^2$ inv. Offenbar ist die Zerlegung eindeutig, und die Behauptung ist bewiesen.

Bemerkung: Aus L^{-1} ist ablesbar, dass I relativ zu I' mit $-\frac{\vec{b}}{\gamma}$ bewegt ist. Kein Widerspruch zur Geschwindigkeitsreziprozität, weil I' relativ zu I auch verdreht ist und

$$\mathbb{R}\vec{a} = \mathbb{M}\vec{a} - \frac{\vec{a}^2}{1+\gamma} \vec{b} = \gamma\vec{b} - \frac{\gamma^2 - 1}{1+\gamma} \vec{b} = \vec{b}$$

$$\Rightarrow -\frac{\vec{b}}{\gamma} = -\mathbb{R}\vec{v} \text{ wie es sein muss}$$

4.3 Struktur der Lorentzgruppe und Thomasrotation

Boosts bilden keine dreiparametrische Untergruppe:

$$L_{\vec{u}}L_{\vec{v}} \neq L_{\vec{w}(\vec{v},\vec{u})} \text{ falls } \vec{u} \nparallel \vec{v}$$

$$L_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\gamma_u \vec{u}^T \\ -\gamma_u \vec{u} & \mathbb{1} + \frac{\gamma_u^2}{1+\gamma_u} \vec{u}\vec{u}^T \end{pmatrix}, \quad L_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v \vec{v}^T \\ -\gamma_v \vec{v} & \mathbb{1} + \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v} \vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix}$$

$$L := L_{\vec{u}}L_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\vec{a}^T \\ -\vec{b} & \mathbb{M} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma = \gamma_v \gamma_u (1 + \vec{v} \cdot \vec{u}) = \gamma_{\vec{w}(\vec{v},\vec{u})}$$

$$\vec{a} = \gamma_v \gamma_u \vec{v} + \gamma_u \vec{u} + \gamma_u \frac{\gamma_v^2}{1+\gamma_v} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} = \gamma \underbrace{\frac{\vec{v} + \frac{1}{\gamma_v} \vec{u} + \frac{\gamma_v}{1+\gamma_v} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{v}}{1 + \vec{v} \cdot \vec{u}}}_{\vec{w}(\vec{v},\vec{u})}$$

$$\vec{b} = \gamma \vec{w}(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{analog}$$

$$\mathbb{M} = \mathbb{1} + \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \vec{v}^T + \frac{\gamma_u^2}{1 + \gamma_u} \vec{u} \vec{u}^T + \gamma_v \gamma_u \left(1 + \frac{\gamma_v \gamma_u}{(1 + \gamma_v)(1 + \gamma_u)} \vec{u} \cdot \vec{v} \right) \vec{u} \vec{v}^T$$

$\Rightarrow L$ nicht symmetrisch außer $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$$\Rightarrow L = L_{\mathbb{R}} L_{\vec{w}(\vec{v}, \vec{u})} \left(\overset{\text{Ü}}{=} L_{\mathbb{R} \vec{w}(\vec{v}, \vec{u})} L_{\mathbb{R}} = L_{\vec{w}(\vec{u}, \vec{v})} L_{\mathbb{R}} \right)$$

$$\text{mit } \mathbb{R} = \mathbb{M} - \frac{\vec{b} \vec{a}^T}{1 + \gamma} \quad \text{Thomasrotation von } \vec{u}, \vec{v}$$

Drehachse: suche Eigenvektor von $\mathbb{R}$ zum Eigenwert 1:

$$\mathbb{R} = \mathbb{1} + \dots \vec{v}^T + \dots \vec{u}^T \Rightarrow \text{Drehachse } \parallel \vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{v} \times \frac{\gamma}{\gamma_u} \vec{w}, \quad \text{weil } \vec{a} = \gamma_u \vec{u} + \dots \vec{v} = \gamma \vec{w}(\vec{v}, \vec{u}) \Rightarrow \text{Drehachse } \parallel \vec{v} \times \vec{w}$$

Sei jetzt $|\vec{u}| \ll 1$ (genügt für Berechnung der Präzessionswinkelgeschwindigkeit)

Behalten nur Terme linear in $\vec{u} \Rightarrow \gamma_u \approx 1$

$$\Rightarrow \mathbb{M} \approx \mathbb{1} + \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \vec{v}^T + \gamma_v \vec{u} \vec{v}^T$$

$$\vec{b} = \vec{a}(\vec{v} \leftrightarrow \vec{u}) \approx \gamma_v(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{b} \vec{a}^T &\approx \gamma_v^2 \vec{u} \vec{v}^T + \gamma_v \vec{v} \left(\gamma_v \vec{v}^T + \vec{u}^T + \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v}^T \right) \\ &= \gamma_v^2 \vec{u} \vec{v}^T + \gamma_v \vec{v} \vec{u}^T + \gamma_v^2 \left(1 + \gamma_v \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{1 + \gamma_v} \right) \vec{v} \vec{v}^T \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{M} - \frac{1}{1 + \gamma} \vec{b} \vec{a}^T \approx \mathbb{1} + \left(\gamma_v - \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \right) \vec{u} \vec{v}^T - \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} \vec{v} \vec{u}^T$$

$$\left(\text{weil } \underbrace{\gamma \approx \gamma_v(1 + \vec{v} \cdot \vec{u})}_{\Rightarrow \frac{\vec{u}}{1 + \gamma} \approx \frac{\vec{u}}{1 + \gamma_v}} \text{ und } \frac{1}{1 + \gamma_v(1 + \vec{v} \cdot \vec{u})} \gamma_v^2 \left(1 + \gamma_v \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{1 + \gamma_v} \right) = \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \right)$$

$$= \mathbb{1} + \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} (\vec{u}\vec{v}^T - \vec{v}\vec{u}^T)$$

Allgemeine infinitesimale Rotation:

$$\mathbb{R}\vec{x} = \vec{x} - \alpha\vec{n} \times \vec{x} \approx \vec{x} + \frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} \underbrace{[\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{x}) - \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{x})]}_{(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{x}}$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} \equiv \alpha\vec{n} \approx -\frac{\gamma_v}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \vec{u} \approx \frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{w} \times \vec{v}$$

$\Rightarrow$ Verdrehung von der „neuen“ Richtung $\vec{w}$ hin zur „alten“ $\vec{v}$: *Thomaspräzession*

Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\Delta\vec{v} \text{ in } I \Rightarrow \Delta\vec{\alpha} = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \Delta\vec{v} \quad (\vec{w} = \vec{v} + \Delta\vec{v})$$

$$\Delta t \rightarrow 0 : \vec{\omega}_T = -\frac{\gamma_v^2}{1 + \gamma_v} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{Thomas-Frequenz}$$

Uneigentliche Lorentztransformationen

Lassen auch $\gamma < 0$ zu ($\Rightarrow \gamma \leq -1$), außerdem $\det \mathbb{R} = -1$ (Drehspiegelungen)

$\Rightarrow$ erweitern Aristoteles-Gruppe um

$$\text{Zeitumkehr } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Raumspiegelung } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ volle Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ ($\det L = \pm 1$)

Untergruppen:

- eigentliche Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+$ ($\det L = +1$)
- orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}^\uparrow$ ($L_0^0 > 0 \Rightarrow L_0^0 \geq 1$, weil $(L_0^0)^2 - L_0^\alpha L_0^\alpha = 1$)

Naturgesetze (ohne Gravitation) sind $\mathcal{L}_+^\uparrow$ -invariant, $\mathcal{L}_+^\uparrow := \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}^\uparrow$

In der Tat sind T und P mikroskopisch keine Symmetrien (schwache Wechselwirkung).

5 Relativistische Punktmechanik

5.1 Kinematik

Ges. kovariante Beschreibung der Bewegung eines Punktteilchens

$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ transformiert nichtlinear unter Boosts (Ü)

$|\vec{v}| < 1$: Invariante Parametrisierung der Weltlinie durch Eigenzeit s : $x^i(s)$

Definition: Vierergeschwindigkeit $u^i := \frac{dx^i}{ds}$, ist ein Vierervektor weil dx^i ein Vierervektor und ds invariant ist. = normierter Tangentenvektor (Parameter=Bogenlänge)

$$u = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \frac{dt}{ds} \left(1, \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \gamma(1, \vec{v}) \Rightarrow v^\alpha = \frac{u^\alpha}{u^0}$$

$$\text{NR } |\vec{v}| \ll 1, \gamma \approx 1 \Rightarrow u \approx (1, \vec{v})$$

instantanes Ruhssystem: $ds = dt \Rightarrow u = (1, \vec{0})$

$$u^2 = \eta_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

$\Rightarrow$ 1 Komponente von u redundant: Kovarianz durch Redundanz

u ist zeitartig, zukunftsgerichtet ($\frac{dt}{ds} > 0$, sonst Antiteilchen)

Definition: Viererbeschleunigung $a^i := \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}$

$$0 = \frac{d}{ds}(\eta_{ik} u^i u^k) = 2\eta_{ik} u^i a^k \Rightarrow ua = 0 \Rightarrow a \text{ raumartig}$$

instantanes Ruhssystem: $a = (0, \vec{b}), \vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Beispiel: *konstante Beschleunigung*

Eigenbeschleunigung $\vec{b}$ konstant $\Rightarrow a^2 = -\vec{b}^2 = -b^2$ konstant

o.B.d.A. $\vec{b} = (b, 0, 0)$

Ansatz $u(s) = (\cosh f(s), \sinh f(s), 0, 0)$

$$\Rightarrow a^2 = -f'^2(s) = -b^2 \Rightarrow f = \pm b(s - s_0) \stackrel{\text{o.B.d.A.}}{=} bs$$

$$\Rightarrow x(s) = \int^s u(s') ds' = \left(\frac{1}{b} \sinh(bs), \frac{1}{b} (\cosh(bs) - 1) \right)$$

falls $x^0(0) = x^1(0) = 0$

$\Rightarrow$ Weltlinie = zeitartige Hyperbel

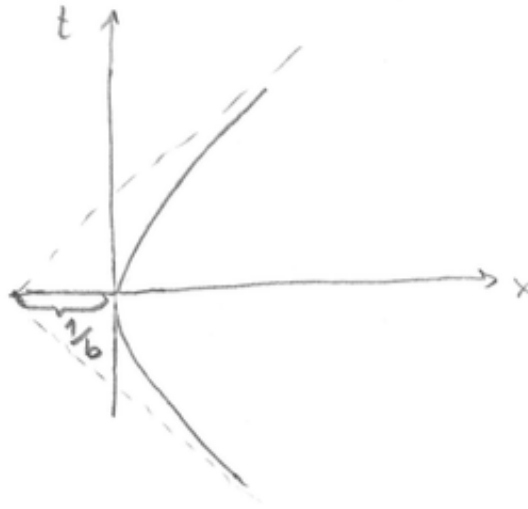


Abbildung 5.1: Zeitartige Hyperbel

5.2 Elemente der relativistischen Dynamik

= Postulate nahegelegt durch nichtrelativistischen Limes (NR) und Kovarianz.

Jedes Teilchen hat invariante (träge) *Masse* m .

Physikalische Bedeutung aus der Bewegungsgleichung, diese soll Gleichheit zweier Vierervektoren bedeuten.

Definiton: Viererimpuls $p = mu \xrightarrow{\text{NR}} (m, m\vec{v})$, ist physikalisch, weil nur ein 4-Vektor in einen kovarianten Erhaltungssatz eingehen kann.

Achtung: $\vec{p} \equiv (p^1, p^2, p^3) = \gamma m \vec{v}$ relativistischer Impuls, wobei γ den sogenannten „relativistischen Massenzuwachs“ impliziert.

Bedeutung von p^0 :

$$p^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \xrightarrow{v \ll 1} m + \frac{mv^2}{2} = \text{klassische kinetische Energie bis auf Konstante}$$

$$\Rightarrow p^0 \equiv E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \text{ relativistische (kinetische) Energie}$$

$$\Rightarrow E_0 = mc^2 = \text{Ruheenergie (eine mögliche Definition der Masse)}$$

$$p_0 \xrightarrow{v \rightarrow 1} \infty \text{ dynamischer Grund für Unerreichbarkeit der Lichtgeschwindigkeit}$$

$\Rightarrow p$ ist "Energie-Impuls-Vektor"

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 \text{ Gleichung der "Massenschale" im Impulsraum:}$$

Allgemeine Definition der Masse.

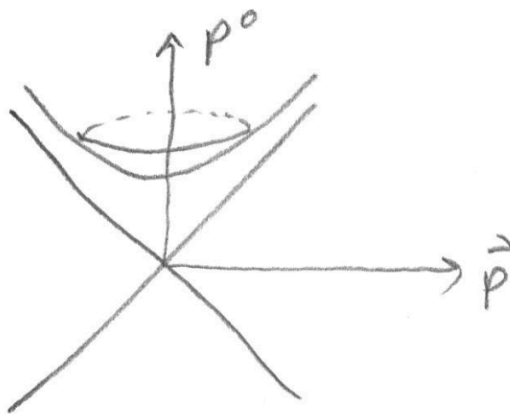


Abbildung 5.2: Zur Definition der Masse

$$\Rightarrow p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} = \vec{\nabla}_p E(\vec{p}) \text{ wie NR (allg. Hamiltonsche Bew.gl.)}$$

Verallgemeinerung des 2. Newtonschen Axioms

$$\frac{dp}{ds} = ma = K \quad \text{lorentzkovariant}$$

K ...Viererkraft, spezifiziert durch Dynamik im engeren Sinn

$$\Rightarrow \text{allgemeine Eigenschaft } Ku = 0$$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{ds} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{Ableitung des relativistischen Impulses nach der Eigenzeit}$$

$$K^0 = \frac{dp^0}{ds} = \gamma \frac{dE}{dt} \quad \text{Energieänderung / Eigenzeit} = \gamma \cdot \text{Leistung der Kraft}$$

3. Newtonsches Axiom

$K_{AB} = -K_{BA}$ ist falsch, weil die physikalische Kraft bzw. Leistung für einen Beobachter $dp/dt \neq dp/ds$ ist. Allenfalls kann

$$\frac{dp_A}{dt} = -\frac{dp_B}{dt}$$

gelten, aber auch das ist wegen Kausalität und Relativität der Gleichzeitigkeit nur für *Kontaktwechselwirkung* sinnvoll (tatsächlich gibt es in der Quantenfeldtheorie nur Kontaktwechselwirkungen). Das 2. Axiom hat daher keine direkte kovariante Verallgemeinerung.

Gleichwertig: $\sum_{A=1}^N p_A = \text{const.}$ für abgeschlossenes System von N Teilchen mit Kontaktwechselwirkung, verallgemeinerbar auf ein System aus Teilchen und Feldern, wenn auch Feldimpulse berücksichtigt werden.

Bemerkung: Impuls und Kraft sind eigentlich Kovektoren, die Masse ein Tensor $\rightarrow$ Wirkungsprinzip.

Anwendungen

1. Streuprozess

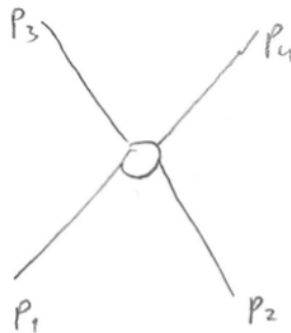


Abbildung 5.3: Streuprozess (im Allgemeinen treten im Zentrum der Skizze weitere („virtuelle“) Teilchen mit Kontaktwechselwirkung auf)

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$p_A^0 = m_A + T_A, \quad T_A = m_A \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right) \text{ reduzierte kinetische Energie}$$

$$\Rightarrow m_1 + T_1 + m_2 + T_2 = m_3 + T_3 + m_4 + T_4$$

Nur die *Summe* aus reduzierten kinetischen Energien und Massen ist erhalten!

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \quad \vec{p}_A = \frac{m_A \vec{v}_A}{\sqrt{1-v_A^2}}$$

Vgl. Newton:

$$\begin{aligned} m_3 &= m_1, & m_4 &= m_2 \\ T_1 + T_2 &= T_3 + T_4, & T_A &= \frac{1}{2} m_A \vec{v}_A^2 \\ \vec{p}_A &= m_A \vec{v}_A \end{aligned}$$

Teilchen können bei Streuung Masse und damit Identität ändern!

2. Zerfallsprozess

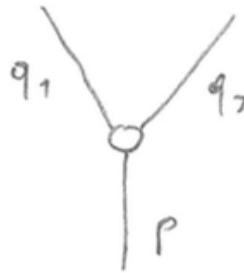


Abbildung 5.4: Zerfallsprozess

$$p = q_1 + q_2$$

$$p^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2$$

$$\Rightarrow m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(q_1^0 q_2^0 - \vec{q}_1 \vec{q}_2)$$

wobei $q_1^0 q_2^0 - \vec{q}_1 \vec{q}_2 > 0$, weil $|\vec{q}_A| = \sqrt{(q_A^0)^2 - m_A^2} < q_A^0$

$\Rightarrow \sum_A m_A^2 < m^2$: Ein Teilchen kann in solche mit kleinerer Masse zerfallen.

5.3 Masselose Teilchen und relativistische Wellenphänomene

$$m = 0 \Rightarrow p^i = m \frac{dx^i}{ds} = 0$$

$\Rightarrow$ keine Wechselwirkung (kein Energie- und Impuls-Austausch möglich) $\Rightarrow$ solche Teilchen gibt es nicht.

Der Schluss gilt nicht, falls $m \rightarrow 0$ und $\Delta s \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow 1 \Rightarrow u \rightarrow \infty$, aber Δx und p endlich und lichtartig: $p^2 = 0$, $p = (|\vec{p}|, \vec{p}) \neq 0$

$\Rightarrow$ masselose Teilchen müssen lichtartigen 4-Impuls haben. Existieren tatsächlich: *Photonen*.

Zusammenhang zwischen mechanischen und Welleneigenschaften (Einstein 1905): Eine klassische monochromatische ebene Welle ist ein Zustand hoher Besetzungszahl von Photonen mit demselben Energie-Impuls

$$p = \hbar k, \quad k = (\omega, \vec{k}) \quad \text{Wellenzahl-4-Vektor}$$

$$\omega = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot \text{Zahl der Wellenperioden/Länge}$$

äquivalent $\lambda\nu = c$

Transformationsverhalten von Welleneigenschaften folgt aus dem 4-Vektorcharakter von k :

$$I \xrightarrow{(v,0,0)} I'$$

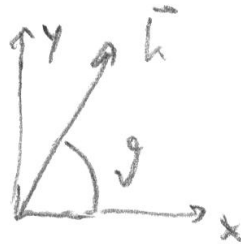


Abbildung 5.5: Wellenvektor mit Winkel ϑ

$$\text{o.B.d.A } k = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k' = \omega' \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta' \\ \sin \vartheta' \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & & \\ -\gamma v & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega' = \gamma \omega (1 - v \cos \vartheta) \quad (\text{I})$$

$$\omega' \cos \vartheta' = \gamma \omega (-v + \cos \vartheta) \quad (\text{II})$$

$$\omega' \sin \vartheta' = \omega \sin \vartheta \quad (\text{III})$$

Aus (I) folgt

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - v \cos \vartheta)} \equiv \delta \cdot \omega',$$

also der bereits bekannte **Dopplereffekt** mit dem relativistischen *Dopplerfaktor* δ .

$$\text{II/I} : \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - v}{1 - v \cos \vartheta}$$

$$\text{III/I} : \sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\gamma(1 - v \cos \vartheta)}$$

$$\left(\Rightarrow \tan \frac{\vartheta'}{2} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \tan \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Eine der beiden Formeln genügt wegen $\cos^2 \vartheta' + \sin^2 \vartheta' = 1$ und Stetigkeit in v (legt den Quadranten fest)

$\vartheta' \neq \vartheta$: **relativistische Aberration**

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \vartheta' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta' \right) \equiv -\sin \alpha = -v$$

Effekt der Bahnbewegung der Erde: $\alpha \approx 20''$ (große Halbachse einer scheinbaren Ellipsenbewegung). Beobachtung: Picard, Bradley 1728 (zusätzlicher Effekt der Erdrotation: $\alpha = k \cos \phi$, $k \approx 0,3''$)

Newtonsche Korpuskeltheorie des Lichts liefert $\tan \alpha = \frac{v}{c}$

$$\alpha_{\text{SRT}} > \alpha_{\text{Newton}}$$

in Übereinstimmung mit relativistischer Addition orthogonaler Geschwindigkeiten bzw. Zeitdilatation + gewöhnlicher Addition (betrachte transversal bewegtes Photon)

$v \rightarrow 1 \Rightarrow \vartheta' = 180^\circ$: alles kommt von vorn ($\rightarrow v, \leftarrow \vec{k}'$), vgl. Fahrt im Regen.



Abbildung 5.6: Aberrationswinkel

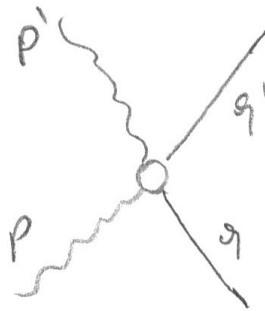


Abbildung 5.7: Compton-Effekt

Compton-Effekt

e^- - γ -Streuung:

$$\begin{aligned}p + q &= p' + q' \\m^2 = q'^2 &= (p - p' + q)^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' + 2q(p - p') + q^2 \\&\Rightarrow q(p - p') = pp'\end{aligned}$$

Ruhsystem des e^- vor dem Stoß:

$$q = (m, \vec{0}), \quad p = \hbar(\omega, \vec{k})$$

$$\Rightarrow m\hbar(\omega - \omega') = \hbar^2\omega\omega'(1 - \cos\vartheta) \quad (\vartheta = \angle(\vec{p}, \vec{p}')) \quad \left| \cdot \frac{2\pi}{\omega\omega'} \right|$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{m}(1 - \cos\vartheta) \quad (\text{Compton 1922})$$

$\frac{h}{mc}$ „Comptonwellenlänge des Elektrons“, $\frac{\hbar}{mc}$ reduzierte Comptonwellenlänge
Frequenzänderung klassisch nicht verständlich!

5.4 Weitere Aspekte der relativistischen Dynamik

Teilchenumwandlung („Umwandlung von Masse in Energie“)

„normale“ Materie: Teilchenmassen und reduzierte kinetische Energie getrennt erhalten.

Gründe:

- diskretes Massenspektrum ($\Rightarrow$ Energieschwellen)
- Erhaltung von Q , B (p stabil, (n nicht stabil, aber es gibt stabile Kerne wegen Pauliprinzip), L (e^- stabil); Abwesenheit von Antimaterie)

Beispiele:

Inelastische Streuung: $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$

Paarvernichtung: $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$, Umkehrung: Paarerzeugung

Zerfall: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

Massendefekt

Bindungsenergie $E_B \equiv -(T + E_{pot}) > 0$ trägt zur Masse bei. Z.B. H-Atom:

$$p + e \rightarrow \text{H} + 2\gamma$$

$$E_B = m_p + m_e - m_{\text{H}} \approx \frac{1}{2} m_e \alpha^2 = 13,56 \text{eV}$$

$$\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \right)$$

Relativer Massendefekt:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{E_B}{m_p + m_e - E_B} \approx \frac{E_B}{m_p} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{m_e}{m_p} \approx 10^{-8}$$

Atomkerne:

$$\frac{\Delta M}{M} \lesssim 10^{-2}$$

Gravitationskollaps:

$$\frac{\Delta M}{M} \lesssim 0,4 \rightarrow \text{ART}$$

Massenmittelpunkt

$$\vec{X} \stackrel{?}{\propto} \sum m_A \vec{x}_A \text{ erfüllt nicht } \dot{\vec{X}} \parallel \vec{P}$$

$$\left(\text{weil } \vec{p}_A = m_A \frac{d\vec{x}_A}{ds_A} \neq m_A \frac{d\vec{x}_A}{dt} \right)$$

$$\rightarrow \vec{X}(t) = \frac{\sum p_A^0 \vec{x}_A(t)}{\sum p_A^0}$$

definiert die Weltlinie des *Zentroids* C ($\Rightarrow$ für freie Teilchen ist $\dot{\vec{X}} = \frac{\vec{P}}{P^0}$)

konvexe Linearkombination mit *nichtskalaren Koeffizienten* $\Rightarrow$ keine kovariante Definition $\Rightarrow C$ hängt vom Bezugssystem ab

z.B. identische Teilchen mit $\vec{v}, -\vec{v} \Rightarrow C$ in Mitte,

aber im Ruhssystem eines Teilchens *jenseits* der Mitte, weil $p_2^0 > p_1^0$

Def. *Schwerpunktsystem*:

$$I_{CM} : \sum_A \vec{p}_A = 0$$

Massenmittelpunkt = Zentroid im ICM

Drehimpuls

„Drehimpulstensor“ $l^{ik} = x^i p^k - x^k p^i$

x^i ...Verbindungsvektor zu einem Bezugspunkt, z.B. Koordinatenursprung

Gewöhnlicher Drehimpuls $l_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x^\beta p^\gamma$ ist axialer 3-Vektor $\rightarrow l_i = \epsilon_{ijmn} u^j l^{mn}$, ϵ_{ijkl} ...vierdimensionales ϵ -Symbol, u ...4-Geschwindigkeit des Beobachters.

$\sum_A l_A^{ik}$ für abgeschlossenes System wechselwirkender Teilchen im Allgemeinen nicht erhalten (ausgenommen Kontaktwechselwirkung) $\rightarrow$ Elektrodynamik (Lorentzkraft ist keine Zentralkraft)

Mit Einbeziehung von Feldern gilt Drehimpulserhaltung.

Wirkungsprinzip für freie Teilchen



Abbildung 5.8: Zeitartige Weltlinie

$$S_C \propto l_C = \int_{P_1}^{P_2} ds \quad \text{für zeitartige Weltlinie } C$$

Soll für Gerade ein Minimum sein, Dimension Wirkung $\rightarrow$

$$S[x(\tau)] = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\dot{x}^2} d\tau \equiv \int L d\tau \quad \left(\cdot \equiv \frac{d}{d\tau} \right)$$

τ beliebiger Parameter, S invariant unter Reparametrisierung $\tau \rightarrow f(\tau)$ bzw. $x \rightarrow x \circ f$, $\sqrt{\dot{x}^2} \rightarrow \sqrt{\dot{x}^2} |f'| \Rightarrow S$ nur invariant, wenn f monoton wachsend $\Rightarrow \tau_2 > \tau_1$ und $\tau_2 < \tau_1$ sind physikalisch unterscheidbar:

$$x^0 \nearrow \tau : \text{Teilchen}, \quad x^0 \searrow \tau : \text{Antiteilchen}$$

z.B. $\tau = t \Rightarrow$ Lagrangefunktion:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \approx -mc^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2$$

bis auf Konstante identisch mit Lagrangefunktion des nichtrelativistischen freien Teilchens

Alternative Wirkung (auch für masselose Teilchen):

$$\tilde{S}[x(\lambda)] = -\frac{1}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 d\lambda$$

ist invariant bis auf konstanten Faktor nur unter affiner Reparametrisierung $\lambda \rightarrow a\lambda + b$
 $\Rightarrow \frac{d^2x}{d\lambda^2} = 0$, für $m > 0$ kann nach Erfüllung der Bewegungsgleichung λ mit $\frac{s}{m}$ identifiziert werden (dann ist $\tilde{S} = S/2$ und die konjugierten Impulse stimmen überein)

Auf lichtartigen Weltlinien ist λ nur ein „affiner Parameter“.

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = -m \frac{\eta_{ik} \dot{x}^k}{\sqrt{\dot{x}^2}} \underbrace{=}_{\sqrt{\dot{x}^2} d\tau = ds} -m \eta_{ik} \frac{dx^k}{ds}$$

$$(\pi_\alpha = p^\alpha, \pi_0 = -p^0)$$

ist kein 4-Vektor, sondern *Kovektor*.

No-interaction theorem

Lagrange- bzw. Hamiltonformalismus lässt keine Wechselwirkung relativistischer Teilchen zu!

5.5 Kovektoren

Sei V ein beliebiger Vektorraum, betrachten geordnete Schar (natürliche Ordnung) von äquidistanten (ohne Metrik definiert) parallelen Hyperebenen (affine TR mit $\dim = n-1$ ($\text{codim} = 1$))

Eine solche Schar definiert eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{R}, v \rightarrow \pm \epsilon \cdot \# \text{ Schnittpunkte des Pfeils mit der Schar. } + (-) \text{ falls Richtung des Pfeils der Ordnung (nicht) entspricht.}$

$$\Rightarrow f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) \quad (\text{im Limes Distanz} \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0)$$

Eine solche Abbildung heißt lineares Funktional oder Kovektor. Allgemeine Form: $f(v) = f_i v^i$

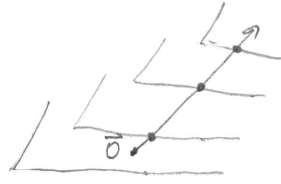


Abbildung 5.9: Grafische Darstellung eines Kovektors

Dualraum $V^* := \{\text{lineare Funktionale über } V\}$

ist Vektorraum: $(\alpha f + \beta g)(v) = \alpha f(v) + \beta g(v)$.

$\dim V^* = \dim V$, aber es existiert kein natürlicher (basisunabhängiger) Isomorphismus. Zu jeder Basis $\{e_i\}$ in V existiert die *duale Basis* $\{e^{*j}\}$ definiert durch $e^{*i}(e_j) = \delta^i_j$. f lässt sich damit als $f = f_i e^{*i}$ darstellen, womit die konkrete Bedeutung der bereits weiter oben eingeführten Koeffizienten f_i gefunden ist.

Im **Minkowski-Vektorraum** V_M (= der mit dem Minkowskiraum assoziierte Vektorraum $\cong$ Raum von 4-Vektoren^{*}) definiert

$v \rightarrow uv$ ein lineares Funktional $u^*(v) = uv = \eta_{ik} u^k v^i = u_i v^i$

$$u_i := \eta_{ik} u^k$$

Die Metrik identifiziert daher V_M mit V_M^*

Anschaulich: Schar $\leftrightarrow$ orthogonaler Vektor mit Länge = ϵ / Abstand benachbarter Hyperebenen, Richtungssinn bestimmt durch Ordnung

Betrachten u und u^* als Repräsentanten ein und desselben physikalischen Objekts:

$u_i \dots$ kovariante,

$u^i \dots$ kontravariante Komponenten des 4-Vektors u

$\Rightarrow$ Skalarprodukt $uv = u_i v^i = u^i v_i$

$$(u_i) = (\eta_{ik} u^k) = (u^0, -\vec{u})$$

^{*}Nur Vierervektoren derselben Dimension bilden einen Vektorraum, dieser ist mathematisch das Tensorprodukt $V_{(\mu)} \equiv V_M \otimes \mathbb{R}_{(\mu)}$, wo der eindimensionale "Maßraum" $\mathbb{R}_{(\mu)}$ isomorph zu $\mathbb{R}$, aber versehen mit der entsprechenden Maßdimension μ ist. Alle Maßräume gehen aus 3 fundamentalen (für Länge, Zeit und Masse) durch Bilden von Tensorprodukten und -quotienten (Tensorwurzeln für nichtrationale Maßeinheiten) hervor.

$$u^i = \eta^{ik} u_k, \quad \eta^{ik} \equiv (\eta^{-1})^{ik} = \eta_{ik}$$

weil $\eta^2 = \text{id}$ ($\eta^{il} \eta_{lk} = \delta^i_k$)

Transformationsverhalten der kovarianten Komponenten:

$$u'_i = \eta_{ik} u'^k = \eta_{ik} L^k_l u^l = \eta_{ik} L^k_l \eta^{lm} u_m = ((L^T)^{-1})^m_i u_m =: L_i^m u_m,$$

weil

$$L^T \eta L = \eta \quad | (L^T)^{-1} \cdot, \cdot \eta$$

$$\eta L \eta = (L^T)^{-1}$$

$\Rightarrow$ Kovektoren transformieren *kontragredient* (gilt allgemein unter linearen Transformationen auch ohne Metrik)

Trotz der Identifizierung haben solche geometrischen Objekte einen „natürlichen Charakter“ bzw. natürliche Indexstellung: z.B. Δx^i Vektor, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ Kovektor („4-Gradient“)

6 Relativistische Kontinuumsmechanik

6.1 Felder, Hyperflächen, Integration

Kinematik eines Kontinuums beschrieben durch Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(t, \vec{x}) \rightarrow u(x)$ (4-Geschwindigkeit eines Materieelements um x);

mechanische Eigenschaften durch räumliche Energiedichte $\epsilon(t, \vec{x})$, räumliche Impulsdichte $\vec{\pi}(t, \vec{x})$;

$\epsilon, \vec{\pi}$ bilden *kein* 4-Vektorfeld, weil *räumliche* Dichten (räuml. Volumen nicht invariant).

Gesamtenergie $P^0(t) = \int d^3x \epsilon(t, \vec{x})$

Gesamtimpuls $\vec{P}(t) = \int d^3x \vec{\pi}(t, \vec{x})$

Hängen i.A. vom Inertialsystem ab, weil weder Integrand noch Integrationsgebiet invariant. Erwarten: $P = (P^0, \vec{P})$ ist 4-Vektor.

Felder

Skalares Feld φ : $\varphi'(x') = \varphi(x)$ oder $\varphi' = \varphi \circ g^{-1}$, $g \in \mathcal{P}$

Vektorfeld:

- kontravariant $v'^i(x') = L^i_k v^k(x)$
- kovariant $v'_i(x') = L_i^k v_k(x)$

4-Gradient eines Skalarfeldes ist kovariantes Vektorfeld:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \equiv \partial_i \varphi \equiv \varphi_{,i} \quad (= (d\varphi)_i)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = L_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

weil

$$dx'^i = L^i_k dx^k \Rightarrow dx^k = (L^{-1})^k_i dx'^i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = (L^{-1})^k_i = L_i^k$$

Wollen $\int d^3x$ zu Integral über Hyperfläche verallgemeinern.

Hyperflächen

Glatte Hyperfläche $\Sigma = 3$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des Minkowskiraumes (z.B. $\{f(x) = \text{const.}\}$ falls $df \neq 0$)

besitzt *Konormale* (z.B. $f_{,i}$; $f_{,i}v^i = 0$, weil Tangentialableitung von f entlang einer Niveaufläche) und *Normalenvektorfeld* $n^i(x) : n^i(x)v_i = 0 \forall$ Tangentenvektoren in x und $n^2 = \pm 1$, falls n zeit- (raum-)artig $\Rightarrow n$ bis auf Vorzeichen eindeutig;

im lichtartigen Fall ist $n^2 = 0 \Rightarrow$ nicht normierbar $\Rightarrow$ nur die Richtung bestimmt

Σ heißt (lokal) raum-, zeit-, lichtartig, falls n zeit-, raum-, lichtartig

- Σ raumartig $\Rightarrow$ alle Tangentenvektoren raumartig
- Σ zeitartig $\Rightarrow$ alle Tangentenvektoren zeit-, raum- oder lichtartig
- Σ lichtartig $\Rightarrow$ alle Tangentenvektoren raum- oder lichtartig



Abbildung 6.1: Hyperfläche (raumartig)

Volumenelement

4-dimensionales orientiertes Volumen eines Parallelepipeds aufgespannt von 4 Vektoren v_A : $V(v_0, v_1, v_2, v_3)$ multilinear, alternierend $\Rightarrow V \propto \det(v_0, v_1, v_2, v_3)$

legen Konstante fest durch $V(e_0, e_1, e_2, e_3) = 1$, wo $\{e_i\}$ Orthonormalbasis mit Standardorientierung, z.B. Standardbasis

$$e_0 = (1, \vec{0}), \quad e_1 = (0, 1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1)$$

Orthonormalbasis $\{e_i\} \rightarrow v_A = v_A^j e_j$

$$\Rightarrow V(v_0, \dots, v_3) = \det \begin{pmatrix} v_0^0 & \dots & v_3^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0^3 & \dots & v_3^3 \end{pmatrix} = \epsilon_{ijkl} v_0^i v_1^j v_2^k v_3^l$$

$$\epsilon_{ijkl} = \begin{cases} +1 & (ijkl) \text{ gerade Permutation von } (0123) \\ -1 & (ijkl) \text{ ungerade Permutation von } (0123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ϵ definiert *Volumsform* (setzt keine Metrik voraus) $\rightarrow$ 4-dimensionales Volumselement:

heuristisch $dV = V(dx^0 e_0, dx^1 e_1, dx^2 e_2, dx^3 e_3) = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \equiv d^4 x$ (exakt: $dV = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$)

3-dimensionales Volumen eines 3-dimensionalen Parallelepipeds = Hyperflächeninhalt

$$\sigma(v_1, v_2, v_3) := V(n, v_1, v_2, v_3)$$

n ...normierter Vektor $\perp v_1, v_2, v_3$ (Wahl der Richtung = Wahl der Orientierung des Parallelepipeds)

Falls n lichtartig, ist $n \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $\sigma = 0$.

Allgemein ist $n_i \propto \epsilon_{ijkl} v_1^j v_2^k v_3^l$

Betrachten orientierte Hyperfläche Σ mit Parameterdarstellung $x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\vec{\xi} \in H$, $H \subseteq \mathbb{R}^3$, so gewählt, dass $\left(n, \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \frac{\partial x}{\partial \xi^2}, \frac{\partial x}{\partial \xi^3}\right)$ standardorientiert*.

Skalares Hyperflächenelement in $x \in \Sigma$

Heuristisch $d\sigma = \sigma(dv_1, dv_2, dv_3)$, wo $dv_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha$ keine Summe!

$$\Rightarrow d\sigma = \det \underbrace{\begin{pmatrix} n^0 & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^0}{\partial \xi^3} \\ n^1 & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dots & \dots \\ n^2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^3 & \dots & \dots & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix}}_{\chi(\vec{\xi})} \underbrace{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}_{\substack{d^3 \xi \text{ Volumselement} \\ \text{im Parameterraum,} \\ d^3 \xi = \left| \frac{\partial(\xi)}{\partial(\xi')} \right| d^3 \xi'}} \equiv n^i d\sigma_i$$

* Die $\frac{\partial x}{\partial \xi^\alpha}$ sind tangential, weil Limiten von Sehnenvektoren; sie sind linear unabhängig, weil $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha}$ eine Matrix von Rang 3 bilden (die Jacobi-Matrix der Parameterfunktionen $x^i(\vec{\xi})$).

$\Rightarrow d\sigma_i = \epsilon_{ijkl} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^3} d^3\xi$ ($= (1/3!) \epsilon_{ijkl} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$; $dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \equiv \frac{\partial(x^j, x^k, x^l)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} d^3\xi$) bilden Kovektor unter eigentlichen Lorentztransformationen ($\det L = +1$), weil $\chi(\vec{\xi})$ invariant, wenn n durch einen beliebigen 4-Vektor ersetzt*. Sie sind auch invariant unter Orientierungserhaltenden Reparametrisierungen, weil

$$\epsilon_{ijkl} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^3} = (-1)^i \frac{\partial(x^0, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)} \text{ (Funktionaldeterminante).}$$

$(d\sigma_i)$...kovektorielles Hyperflächenelement, ist auch für lichtartige Hyperfläche $\neq 0$

$$\det \left(v, \frac{\partial x}{\partial \xi^1}, \frac{\partial x}{\partial \xi^2}, \frac{\partial x}{\partial \xi^3} \right) = 0 \quad \forall \text{ tang. } v \Rightarrow v^i d\sigma_i = 0 \Rightarrow d\sigma_i \propto n_i$$

$\Rightarrow d\sigma_i = \pm n_i d\sigma$, falls Σ raum-/zeitartig** (vgl. $dF = \vec{n} \cdot d\vec{F}$, $d\vec{F} = \vec{n} dF$ für Flächen im $\mathbb{E}^3$).

Für die Berechnung von 4-dimensionalen Volums- und Hyperflächeninhalten sind das Volumsmaß $|dV|$ bzw. das Hyperflächenmaß $|d\sigma|$ heranzuziehen.

Für eine zeitartige Hyperfläche parallel zur t -Achse ($\Sigma = I \times A$) mit Parametern t und x^α, x^β in zyklischer Ordnung ist $d\sigma_0 = 0, d\sigma_\alpha = -dt dF^\alpha$ ($dF^\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\beta \wedge dx^\gamma$ [†] $\Rightarrow d\sigma = n^i d\sigma_i = -dt \vec{n} \cdot d\vec{F} = -dt dF, d\sigma_\alpha = n_\alpha dt dF$, das Vorzeichen ist eine Konsequenz unserer metrischen Konvention)

Integration

$$\int \dots d^4x, \quad \int \dots d^3\xi \text{ wie in der Analysis definiert}$$

4-dimensionales Gebiet G , skalare Funktion f :

$$\int_G f dV = \int_G f(x) d^4x \text{ (Standard-Integral im } \mathbb{R}^4)$$

Hyperfläche Σ :

$$\int_\Sigma f d\sigma = \int_H f \left(x \left(\vec{\xi} \right) \right) \chi \left(\vec{\xi} \right) d^3\xi \text{ (Standard-Integral im } \mathbb{R}^3)$$

Vektorfeld v :

* Allgemein sind die algebraischen Komplemente einer Matrix von 4-Vektoren Kovektorkomponenten.

** Die $d\sigma_i$ hängen nicht von der Wahl von n ab, $d\sigma$ schon.

[†] keine Summe; $= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\beta \wedge dx^\gamma$ mit Summe, $dx^\beta \wedge dx^\gamma \equiv \frac{\partial(x^\beta, x^\gamma)}{\partial(\xi^1, \xi^2)} d\xi^1 d\xi^2$

$$\int_{\Sigma} v^i d\sigma_i = \int_H v^i \left(x \left(\vec{\xi} \right) \right) \epsilon_{ijkl} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^3} d^3 \xi \quad (\text{Summe von Standard-Integralen im } \mathbb{R}^3)$$

Bemerkung: I. A. sind mehrere Gebiete $H_A \subset \mathbb{R}^3$ nötig, um Σ vollständig zu parametrisieren, z.B. im Fall der S^2 2 Gebiete.

Satz von Gauß in 4 Dimensionen

$$\int_G \partial_i v^i dV = \int_{\partial G} v^i d\sigma_i$$

Dabei ist ∂G so zu orientieren, dass die Tangentenbasis unter Hinzunahme von n^i (an 0. Stelle) die Orientierung von G (Standardorientierung) liefert, wenn die *Konormale* n_i nach außen gerichtet ist (d.h. $n_i t^i > 0$ für alle nach außen weisenden transversalen Vektoren t bzw. die n_i entsprechende Schar nach außen aufsteigt).

Falls $\partial G = I \times A$, ist $v^i d\sigma_i = \vec{v} \cdot \vec{n} dt dF$ mit nach außenweisendem Vektor $\vec{n}$.

Beweis: Zunächst sei ∂G bezüglich aller Koordinatenebenen zweifach rückprojizierbar, d.h. durch zwei Abbildungen des jeweiligen Grundrisses bestimmt.

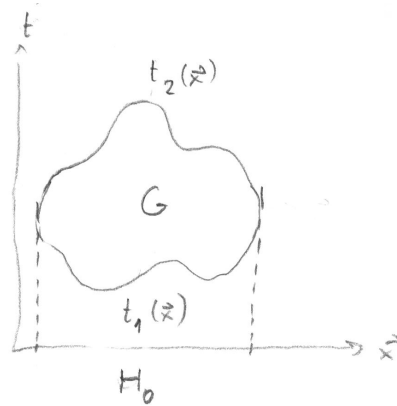


Abbildung 6.2: Gebiet G mit ∂G zweifach rückprojizierbar

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_G \partial_0 v^0 dV &= \int_{H_0} d^3 x \int_{t_1(\vec{x})}^{t_2(\vec{x})} \partial_0 v^0 dt \\ &= \int_{H_0} d^3 x [v^0(t_2(\vec{x}), \vec{x}) - v^0(t_1(\vec{x}), \vec{x})] \\ &= \int_{\partial G} v^0 d\sigma_0 \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}
 \int_G \underbrace{\partial_\alpha v^\alpha}_{\text{keine Summe}} dV &= \int_{H_\alpha} dt dF^\alpha \int_{x_1^\alpha(t, x^\beta, x^\gamma)}^{x_2^\alpha(t, x^\beta, x^\gamma)} \partial_\alpha v^\alpha dx^\alpha \\
 &= \int_{H_\alpha} dt dF^\alpha \left[v^\alpha \left(t, x_2^\alpha(t, x^\beta, x^\gamma), x^\beta, x^\gamma \right) - v^\alpha \left(t, x_1^\alpha(t, x^\beta, x^\gamma), x^\beta, x^\gamma \right) \right] \\
 &= \int_{\partial G} dt v^\alpha \underbrace{dF^\alpha}_{-n_\alpha dF} \\
 &= \int_{\partial G} v^\alpha d\sigma_\alpha
 \end{aligned}$$

Allgemein ist G aus 2-fach rückprojizierbaren Gebieten zusammensetzbar:

$$\Rightarrow \int_G \partial_\alpha v^\alpha dV = \sum_i \int_{\partial G_i} v^\alpha d\sigma_\alpha = \int_{\partial G} v^\alpha d\sigma_\alpha$$

(Jede Grenzfläche trägt zwei mal mit verschiedener Orientierung, also insgesamt 0, bei.)

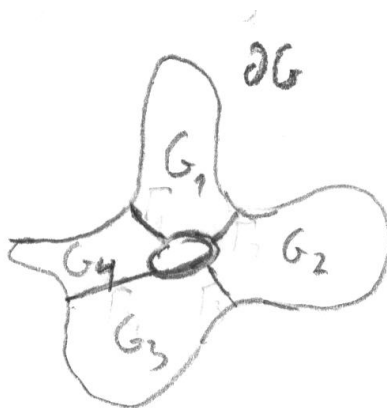


Abbildung 6.3: Zusammengesetztes Gebiet

6.2 Dichten und Erhaltungsgrößen

Betrachten skalare „extensive“ Größe Q = „Ladung“ (z.B. elektrische Ladung)

$$Q(t) = \int d^3x \underbrace{\rho(t, \vec{x})}_{\substack{\text{räuml. Dichte v. } Q \\ \text{(Ladung/Volumen)}}} = \int_{\{x^0=\text{const.}\}} d\sigma_0 \rho = \int d\sigma_i j^i, \quad \rho \equiv j^0, \text{ weil } d\sigma_\alpha = 0$$

Verallgemeinerung auf beliebige Hyperfläche Σ :

$$Q_\Sigma = \int_\Sigma d\sigma_i j^i$$

Q_Σ lorentzinvariant, insbesondere für Σ infinitesimal $\Rightarrow$ für beliebiges $d\sigma_i$ ist $d\sigma_i j^i$ invariant $\Rightarrow j$ ist 4-Vektor und $\rho = j^0$

Bedeutung von $\vec{j}$: Betrachte $\Sigma = I \times A$ mit A so orientiert, dass $d\sigma_\alpha = dt dF^\alpha = dt n^\alpha dF$, $\vec{n}$ bestimmt durch Orientierung von A und Standardorientierung im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= \int_{t_1}^{t_2} dx^0 \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{F} \\ &= \text{Ladung, die zwischen } t_1 \text{ und } t_2 \text{ durch die Fläche } A \text{ fließt} \\ &\quad (\text{in dem durch } n \text{ vorgegebenen Sinn}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow j^\alpha = \text{Ladung/Zeit} \cdot \text{Fläche} \perp \vec{e}_\alpha = (\text{Stromdichte von } Q)^\alpha$

I, A infinitesimal $\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{F}$ ist Ladungsdurchsatz = *Strom* durch die von $d\vec{F}$ bestimmte infinitesimale Fläche

j^i heißt *Stromdichte-4-Vektor* von Q

Q heißt *erhalten*, wenn Q_Σ für alle global raumartigen Hyperflächen (reichen ins Unendliche und sind asymptotisch raumartig) denselben Wert hat.

Ladungsverteilung heißt *isoliert*, wenn jeder raumartige Querschnitt von $\text{supp } j$ kompakt ist. Für eine solche Verteilung gilt der

Satz: Q erhalten $\Leftrightarrow \partial_i j^i = 0$ (Kontinuitätsgleichung).

Beweis:

$\Leftarrow$: betrachten 4-dimensionalen Zylinder $\supset \text{supp } j$ mit Mantel S (zeitartig) $\Rightarrow j = 0$ auf S . Seien Σ_1 und Σ_2 zwei global raumartige Hyperflächen, die sich innerhalb des Zylinders nicht überschneiden (diese Annahme ist tatsächlich nicht notwendig, siehe Folgerung):

$$0 = \int_G \partial_i j^i dV \underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial G} j^i d\sigma_i = \int_{\Sigma_2} j^i d\sigma_i - \int_{\Sigma_1} j^i d\sigma_i \Rightarrow Q_{\Sigma_2} = Q_{\Sigma_1}$$

(Standardbeweis argumentiert „eine Dimension tiefer“ ($\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 \equiv \Sigma$ ($\partial\Sigma = \emptyset$), $Q_{\Sigma_2} - Q_{\Sigma_1} \rightarrow \dot{Q}$: $\frac{dQ}{dt} = \int_\Sigma \dot{\rho} d^3x = - \int_\Sigma \text{div} \vec{j} d^3x = - \int_{\partial\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0$)

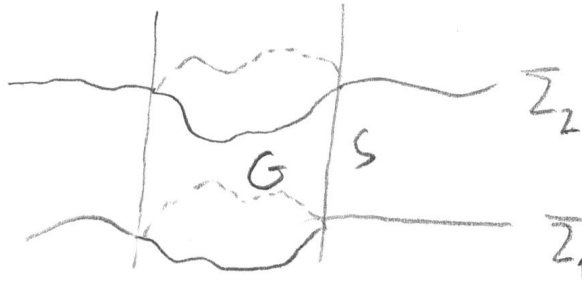


Abbildung 6.4: Zylinder mit Hyperflächen Σ_1 und Σ_2

$\Rightarrow$: Betrachten die Mannigfaltigkeit

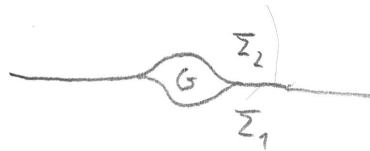


Abbildung 6.5: Mannigfaltigkeit mit Gebiet G

$$0 = Q_{\Sigma_2} - Q_{\Sigma_1} = \int_G d^4x \partial_i j^i \Rightarrow \partial_i j^i = 0 \quad \forall x \text{ (lasse } G \text{ zu Punkt in } x \text{ schrumpfen)}$$

Folgerung:

$$Q_{\{t=0\}} = Q_{\{t'=0\}} \text{ für beliebige Inertialsysteme } I, I'$$

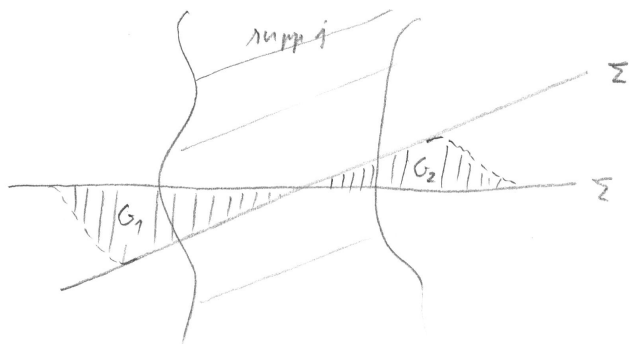


Abbildung 6.6: Skizze zur Folgerung

Beweis:

Können Σ' außerhalb $\text{supp } j$ deformieren

$$\Rightarrow 0 = \left(\int_{G_1} - \int_{G_2} \right) d^4 x \partial_i j^i = Q_{\Sigma'} - Q_{\Sigma}$$

Wie eindeutig ist j durch Q und $j^i_{,i} = 0$ allein festgelegt? $\tilde{j}^i = j^i + f^{ik}_{,k}$, $f^{ik} = -f^{ki}$ erfüllt $\tilde{j}^i_{,i} = 0$ und $\tilde{Q} = Q$:

$$\int_{\Sigma} d\sigma_i f^{ik}_{,k} \quad \underbrace{=}_{\substack{\text{verallg.} \\ \text{Satz v. Gau\ss}}} \quad \int_{\partial\Sigma} \underbrace{d\sigma_{ik}}_{\substack{\text{tensorielles} \\ \text{Flächenelement}}} f^{ik} = 0,$$

falls f^{ik} hinreichend abfällt.

6.3 Der Energie-Impuls-Tensor

P^i ... 4 Ladungen, jede hat ihre eigene Stromdichte

$$\rightarrow P^i_{\Sigma} = \int_{\Sigma} T^{ik}(x) d\sigma_k$$

Fordern: P^i_{Σ} ist 4-Vektor $\forall \Sigma$, wähle Σ beliebig infinitesimal $\Rightarrow T^{ik} n_k$ ist 4-Vektor für beliebigen Kovektor n .

Ein Objekt T^{ik} mit dieser Eigenschaft heißt *kontravarianter Tensor 2. Stufe* und definiert eine lineare Abbildung: Kovektoren $\rightarrow$ Vektoren

Transformationsverhalten:

$$T^{ik} u'_k = L^i_m T^{mn} u_n = L^i_m T^{mn} (L^T)_n^k u'_k = L^i_m L_n^k T^{mn} u'_k$$

u' beliebig $\Rightarrow T^{ik} = L^i_m L_n^k T^{mn}$, genauer:

$$T^{ik}(x') = L^i_m L_n^k T^{mn}(x) : \text{kontravariantes Tensorfeld 2. Stufe}$$

$T^{ik}(x)$ heißt *Energie-Impuls-Tensor*, er legt die mechanischen Eigenschaften eines Kontinuums fest (so wie der Energie-Impuls-Vektor diejenigen eines Punktteilchens).

Physikalische Bedeutung

Aus der Interpretation einer allgemeinen 4-Stromdichte j folgt:

$$T^{00} = \epsilon \text{ Energiedichte}$$

$$T^{0\alpha} = S^{\alpha}, \vec{S} \text{ Energiestromdichte}$$

$T^{\alpha 0} = \pi^\alpha$, $\vec{\pi}$ Impulsdichte

(diese 3-Vektoren sind tatsächlich Tensorkomponenten!)

$T^{\alpha\beta}$ = Komponente der Impulsstromdichte =

= Impuls $^\alpha$ / Zeit · Fläche ($\perp \vec{e}_\beta$) = Kraft $^\alpha$ / Fläche ($\perp \vec{e}_\beta$)

Wählt man $\sum = I \times A$ infinitesimal und die Orientierung von A geeignet, folgt aus der Definitionsgleichung von T^{ik} für den *Impulsstrom* durch A

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = T^{\alpha\beta} dF^\beta$$

$T^{\alpha\beta}$ hat die Dimension Druck bzw. Spannung, daher heißt $-T^{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\beta$ *Spannungstensor*.

Lässt sich eine Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ des Impulsstroms identifizieren, kann man den Charakter der Kraft klassifizieren, indem man den Impulsdurchsatz durch eine infinitesimale Fläche mit Normale $\vec{n}$ betrachtet. Einfachster Fall $T^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}$, $p > 0$

$\Rightarrow \vec{K} = p\vec{n}dF$ zeigt in Richtung der Ausbreitung $\rightarrow$ Abstoßung mit Druck p

analog: $T^{\alpha\beta} = -T\delta^{\alpha\beta}$, $T > 0 \Rightarrow$ Anziehung mit Spannung T . Ist $\vec{K} \perp \vec{n} \Rightarrow$ Scherung

Ist $T^{\alpha\beta}$ allgemein symmetrisch, beschreibt es anisotropen Druck bzw. Spannung mit drei Hauptrichtungen. Auch wenn die Ausbreitungsrichtung unbekannt ist, wird doch zumindest mikroskopisch $T^{\alpha\beta}$ die Summe von Beiträgen mit wohldefinierter Ausbreitungsrichtung sein $\Rightarrow$ die Klassifikation gilt allgemein.

Die Kraft ist im Allgemeinen nicht physikalisch manifest. Z.B. hat eine Strömung von staubartiger Materie einen („dynamischen“ wegen $\vec{v} \neq 0$) Druck > 0 , dieser wird aber erst wirksam, wenn eine stationäre Wand mit Kontaktwechselwirkung mit den Staubteilchen eingebracht wird. Auf eine infinitesimale Wandfläche mit $d\vec{F} \parallel \vec{v}$ wirkt dann die Kraft $K^\alpha = 2T^{\alpha\beta}dF^\beta$, falls die Teilchen vollkommen reflektiert werden. Außerdem ist auf der anderen Seite der Wand die Kraft $-\vec{K}$ wirksam, die die Wand stationär hält. Beide Kräfte „wirken“ zur Wand hin, was für Druck im Gegensatz zu Spannung charakteristisch ist. In einem Gas herrscht auch im (makroskopischen) Ruhssystem („hydrostatischer“) Druck > 0 , weil ein Teilchen mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ genau denselben Beitrag zu $T^{\alpha\beta}$ liefert wie ein solches mit $-\vec{v}$. Wieder kann der Druck als Kraft auf eine stationäre Wand, die die Teilchen reflektiert, nachgewiesen werden: $K^\alpha = T^{\alpha\beta}dF^\beta$ (ohne Faktor 2, weil von einer Seite nur die Hälfte der Teilchen kommt.).

Spannung (Druck < 0) herrscht z.B. in einem Festkörper, der an zwei Enden auseinandergezogen wird. Hier wirkt das durch $T^{\alpha\beta}$ beschriebene Kräftepaar tatsächlich auf materielle Oberflächenelemente des Kontinuums; die Kraftübertragung erfolgt sogar (im Fall idealer Starrheit) ohne mikroskopische Bewegung.

Im Allgemeinen lässt sich T^{ik} störungsfrei (im Prinzip) nur über das erzeugte Gravitationsfeld nachweisen ($\rightarrow$ ART)

Andere Bezeichnung für T^{ik} : Energie-Spannungs-Tensor (stress-energy tensor)

Bemerkung: Nur für staubartige Materie ist das Geschwindigkeitsfeld $u(x)$ durch $\vec{v} = \frac{\vec{S}}{\epsilon}$ bestimmt, im Allgemeinen ist $\vec{v} \neq \frac{\vec{S}}{\epsilon} = \text{Geschwindigkeit des Energiestroms}$.

Erhaltungssätze

Hatten $\partial_i j^i = 0 \Leftrightarrow Q_\Sigma$ u. a. v. Σ , falls Σ global raumartig.

Analog: $T^{ik}_{,k} = 0 \Leftrightarrow P_\Sigma^i$ u. a. v. Σ , falls Σ global raumartig.

$T^{ik}_{,k} = 0$ ist die differentielle Form der Energie-Impuls-Erhaltung. Diese gilt für ein abgeschlossenes System. Dabei ist T^{ik} der *totale* Energie-Impuls-Tensor, d.h. enthält Beiträge der Materie und Felder im System.

Drehimpuls eines Kontinuums:

$$L_\Sigma^{ik} = \int_{t=\text{const}} d^3x (x^i \pi^k - x^k \pi^i), \pi^i = T^{i0}$$

$\xrightarrow{\text{kovariant}} L_\Sigma^{ik} = \int_\Sigma (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) d\sigma_l$ (Bahn-)Drehimpulstensor der Materie (oder Felder) in der raumartigen Hyperfläche Σ .

Falls $T^{ik}_{,k} = 0$ und $T^{ik} = T^{ki}$, ist L^{ik} konstant: $(x^i T^{kl} - x^k T^{il})_{,l} = 0$ genügt wegen des Satzes von Gauß

$$\Rightarrow T^{ki} + x^i T^{kl}_{,l} - T^{ik} - x^k T^{il}_{,l} = 0 \quad \checkmark$$

Für „normale“ Materie wird $T^{ik} = T^{ki}$ vorausgesetzt, auch in der ART. (In der Elastizitätstheorie folgt die Symmetrie des Spannungstensors, $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, aus der Existenz eines „elastischen Potenzials“.) Ist $T^{ik} \neq T^{ki}$, setzt sich der Gesamtdrehimpuls aus einem Bahn- und einem Spindrehimpuls zusammen:

$$J^{ik} = L^{ik} + S^{ik}$$

mit dem Spintensor $S^{ik} = \int s^{ikl} d\sigma_l$

$s^{ikl} = -s^{kil}$... Spinstromdichte

J^{ik} ist erhalten, falls $T^{ik}_{,k} = 0$ und $T^{ki} - T^{ik} + s^{ikl}_{,l} = 0$.

Beispiel: *Ideales Fluid*

4-Geschwindigkeitsfeld $u^i(x)$ definiert lokales Ruhesystem (LRS)

keine Scherungskräfte $\Rightarrow$ im LRS ist $T^{\alpha\beta}$ diagonal.

Isotropie im LRS $\Rightarrow T^{\alpha\beta} = p^* \delta^{\alpha\beta}$, $\vec{S}^* = 0$, $\vec{\pi}^* = 0$

$$\Rightarrow T^{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon^* & & & 0 \\ & p^* & & \\ & & p^* & \\ 0 & & & p^* \end{pmatrix}$$

ϵ^* ... Energiedichte im LRS

p^* ... Energiedichte im LRS

Wir lassen ab jetzt $*$ weg $\Rightarrow T^{ik} = (\epsilon + p)u^i u^k - p\eta^{ik}$ ist kovariant, reduziert sich im LIS auf obiges. ϵ, p sind Skalare!

$3 + 1 + 1 = 5$ unbekannte Funktionen erfüllen

$T^{ik}_{,k} = 0$, Zustandsgleichung $p = p(\epsilon)$ („barotrop“): 5 Gleichungen

$T^{ik}_{,k} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\dot{p}u_i + (\epsilon + p)\dot{u}_i - p_{,i} = 0}$$

: relativistische Euler-Gleichung

$\cdot \equiv u^k \partial_k$ konvektive Ableitung (= Zeitableitung im lokalen Ruhssystem)

Einfachste Zustandsgleichung: $p = 0$ (Staub)

$\Rightarrow T^{ik} = \epsilon u^i u^k \Rightarrow \dot{u}^i = 0 \Rightarrow$ inertielle Bewegung

Bemerkung: Im Allgemeinen folgt aus $T^{ik}_{,k} = 0$ keine Bewegungsgleichung

Nichtmechanische Bestimmungsstücke eines idealen Fluids:

Teilchenzahlstromdichte

$n^i(x) = n(x)u^i(x)$, $n(x)$ = Zahldichte im LRS

Erhaltung der Teilchenzahl $N = \int_{\Sigma} n^i d\sigma_i$, Σ global raumartig

$\Leftrightarrow$ Kontinuitätsgleichung $n^i_{,i} = 0$

$\rightarrow$ eindeutige Lösung $n(x)$, falls u^i und $n(0, \vec{x})$ (allgemeiner: $n|_{\Sigma}$ für ein global raumartiges Σ) bekannt.

Entropie/Teilchen $s(x)$

Erster Hauptsatz für Teilchen im Gleichgewicht: $de = Tds - pdv$

$v \equiv \frac{1}{n}$ (Volumen/Teilchen), $e = \frac{\epsilon}{n}$ (Energie/Teilchen) (alles Funktionen von x)

Flüssigkeiten (im engeren Sinn) in 1. Näherung inkompressibel:

$\epsilon = \text{const}$ (allerdings existiert eine inkompressible Flüssigkeit in der SRT ebensowenig wie ein starrer Körper)

Gas = kompressibles ideales Fluid

Bemerkungen zur relativistischen Thermodynamik

1. Das Gleichgewicht zwischen relativ zueinander bewegten Körpern ist problematisch. Daher gibt es auch verschiedene Ansätze betreffend das Transformationsverhalten der Temperatur unter Boosts (bis hin zur Nichtexistenz).

Folgender Ansatz erscheint am sinnvollsten:

Die Entropie S ist eine skalare Größe (daher existiert auch eine 4-Entropiestromdichte s^i) und hängt natürlicherweise von E ab (nebst anderen Variablen). Die allgemeinste Definition der Temperatur ist $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$, $E = P^0 \Rightarrow \frac{1}{T}$ ist die 0-Komponente des Kovektors $k\beta_i \equiv \frac{\partial S}{\partial P^i} =$ „inverser Temperatur-4-Vektor“.

$$\Rightarrow T' = \sqrt{1 - v^2} T$$

Zum selben Schluss kommt man über die thermodynamische Definition der Entropie $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \rightarrow k\beta_i \delta Q_{\text{rev}}^i$, da natürlicherweise δQ wie E die 0-Komponente eines 4-Vektors ist.

2. Die natürliche Verallgemeinerung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung $f_M(v) \propto v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ ist die *Jüttner-Verteilung* $f_J(v) \propto \gamma^5 e^{-\frac{m\gamma}{kT}}$
 $(1 = \int_0^1 f_J(v) dv \propto 4\pi \int_0^\infty dp p^2 e^{-\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{kT}}, p = \gamma mv)$. Für ein Gas im bewegten Behälter wird man den Exponenten gleich $-\beta_i p^i$ setzen.

6.4 Tensoren

Abstrakte Definition: *affiner Tensor* vom Typ (p, q) über Vektorraum V (endlichdimensional) ist eine multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R}$$

allgemeine Form: Mit $w^* = w_i e^{*i}$, $v = v^i e_i$, $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$ (duale Basis) ist

$$T(w^{*(1)}, \dots, w^{*(p)}; v_{(1)}, \dots, v_{(q)}) = \underbrace{T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}}_{\text{Tensorkomponenten}} w_{i_1}^{(1)} \dots w_{i_p}^{(p)} v_{(1)}^{j_1} \dots v_{(q)}^{j_p}$$

T heißt p -fach kontravariant, q -fach kovariant, $p + q$ heißt Stufe.

Transformationsverhalten unter Basiswechsel mit $L \in GL(V)$:

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = L^{i_1}_{m_1} \dots L^{i_p}_{m_p} L^{n_1}_{j_1} \dots L^{n_q}_{j_q} T^{m_1 \dots m_p}_{n_1 \dots n_q}$$

gilt auch für *affine* Abbildungen (eines affinen Raums mit VR V) mit homogenem Anteil

$$L = (L^i_k), L^k_i = ((L^T)^{-1})^k_i$$

Spezialfälle:

$p = 0, q = 0$: Skalar (Invariante)

$p = 1, q = 0$: (kontravarianter) Vektor ($\in V^{**} = V : v(w^*) = w^*(v)$)

$p = 0, q = 1$: Kovektor $\in V^*$

$p = 1, q = 1$: Endomorphismus (lineare Abbildung mit Matrix T_j^i)

(Anti-)Symmetrie in einem Paar gleichartiger Indizes, z.B. $T^{i\dots j\dots} = \pm T^{j\dots i\dots}$ (anti-)symmetrisch in i und j , ist basisunabhängige Eigenschaft.

Algebraische Operationen (basisunabhängig)

a) Linerkombination von Tensoren gleichen Typs:

$$\alpha A^{\dots} + \beta B^{\dots} = C^{\dots} \text{ oder } C = \alpha A + \beta B$$

$\Rightarrow$ Tensoren gleichen Typs bilden Vektorraum

$$\mathfrak{T}^{(p,q)} = \underbrace{V \otimes V \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q \equiv V^p \otimes V^{*q}$$

erzeugt von den zerfallenden Tensoren $v_{(1)} \otimes \dots \otimes v_{(p)} \otimes w^{*(1)} \otimes \dots \otimes w^{*(q)}$ definiert durch

$$v_{(1)} \otimes \dots \otimes w^{*(q)}(x^{*(1)}, \dots, x^{*(p)}, y_{(1)}, \dots, y_{(q)}) := v_{(1)}(x^{*(1)}) \dots v_{(p)}(x^{*(p)}) w^{*(1)}(y_{(1)}) \dots w^{*(q)}(y_{(q)})$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}^{(p,q)} \ni T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_q}$$

$$\Rightarrow \dim \mathfrak{T}^{(p,q)} = n^{p+q}, n = \dim V$$

b) Tensorprodukt

Eindeutige Erweiterung von $\otimes$ auf Tensoren beliebigen Typs durch Assoziativität und Multilinearität:

$$(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_q}) \otimes (e_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_{q+1}} \otimes \dots \otimes e^{*j_s}) = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_s}$$

$$\Rightarrow: A \otimes B = C, A \in \mathfrak{T}^{(p,q)}, B \in \mathfrak{T}^{(p',q')} \Rightarrow C \in \mathfrak{T}^{(p+p',q+q')} \text{ mit } C^{i\dots j\dots}_{k\dots l\dots} = A^{i\dots}_{k\dots} B^{j\dots}_{l\dots}$$

$\rightarrow$ Tensoralgebra über V = direkte Summe der Vektorräume von Tensoren aller Typen über V mit $\otimes$ als Multiplikation:

$$\mathfrak{T} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{T}^{(p,q)} = \mathbb{R} \oplus V \oplus V^* \oplus V \otimes V \oplus V \otimes V^* \oplus V^* \otimes V^* \oplus \dots, \mathbb{R} = V^0$$

hat Einheit $id_{\mathfrak{T}} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$

$\mathfrak{T}$ ist ∞ -dim.;

kein Problem, wenn nur endliche Linerkombinationen zugelassen sind.

c) Verjüngung oder Kontraktion

$$\underbrace{T^{\dots i \dots}_{\dots j \dots}}_{(p,q)} = \underbrace{Q^{\dots}_{\dots}}_{(p-1,q-1)}$$

Spezialfall: Spur T^i_i eines Tensors 2. Stufe

d) Überschiebung = Tensorprodukt mit Kontraktion

$$\underbrace{A^{i\dots j\dots}_{k\dots}}_{(p,q)} \underbrace{B^{m\dots}_{l\dots j\dots}}_{p',q'} = \underbrace{C^{i\dots \hat{j}\dots m\dots}_{k\dots l\dots \hat{j}\dots}}_{(p+p'-1, q+q'-1)}$$

Spezialfälle: $u_i v^i = u^*(v) = v(u^*)$, $u_i = \eta_{ik} u^k$

Kontraktion und Überschiebung können auch über mehrere Indexpaare erfolgen.

Quotiententheorem

Ist $C^{i\dots k}_{j\dots l} = A^{i\dots km\dots}_{j\dots ln\dots} B^{n\dots}_{m\dots}$ für beliebige Tensoren B von Typ (p, q) ein Tensor vom Typ (p', q') , dann ist A ein Tensor vom Typ $(p' + q, q' + p)$.

Beweis $\rightarrow$ Übung (haben es bewiesen für $A^{ik} = T^{ik}$, $p' = 1, q = 1$) Z.B. $v^i u_i$ invariant $\forall$ Vektoren $v \Rightarrow u$ Kovektor

Invariante Tensoren: Komponenten in jeder Basis dieselben, z.B. alle 0-Tensoren, alle Skalare, $\nexists$ invariante Vektoren, Kovektoren außer 0. Einfachster nichttrivialer Fall: Typ(1,1) (definiert Endomorphismen: $x'^i = T^i_k x^k$) : $T^i_k = \delta^i_k$ ist invariant (nicht $T_{ik} = \delta_{ik}$!)

Alle nichttrivialen invarianten affinen Tensoren sind Tensorprodukte von δ^i_k .

Lorentz-Tensoren

V = Minkowski-Vektorraum

Wegen $V = V^*$ lassen sich affine Tensoren verschieden Typs mit demselben Minkowski-tensor durch *Indextransport* identifizieren, z.B. $T_{ik} = \eta_{im} \eta_{kn} T^{mn}$, $T^i_j = \eta_{jk} T^{ik}$, $T^{ik} = \eta^{im} \eta^{kn} T_{mn}$

$\rightarrow$ kovariante, gemischte, kontravariante Komponenten *desselben* Tensors (insbesondere $\eta^{ij} = \eta^{ik} \eta^{jl} \eta_{kl}$, weil $\eta^{-1} = \eta^{-1} \eta (\eta^{-1})^T$)

Einschränkung der Transformationsgruppe auf die Lorentzgruppe gestattet mehr Tensoren und mehr invariante Tensoren: Lorentztensoren im *weiteren* Sinn. Der metrische Tensor η_{ab} ist lorentzinvariant: $\eta'_{ab} = L_a^i L_b^k \eta_{ik} = \eta_{ab}$

Beweis: $\eta' = (L^{-1})^T \eta L^{-1} = \eta$, weil L^{-1} auch eine Lorentztransformation, und $L^T \eta L = \eta$ bereits bekannt.

Pseudotensoren

Tensoren bezüglich $\mathcal{L}_+$; Vorzeichenwechsel, falls $L \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_+$

Z.B. ϵ_{abcd} definiert einen invarianten Pseudotensor:

Falls Tensor, wäre $\epsilon'_{abcd} = L_a^i L_b^j L_c^k L_d^l \epsilon_{ijkl} = (\det L) \epsilon_{abcd}$

Man legt aber fest $\epsilon'_{abcd} = \epsilon_{abcd}$! (reine Konvention)

Weitere Eigenschaften:

$$\epsilon^{abcd} = (\det \eta) \epsilon_{abcd} = -\epsilon_{abcd}$$

$\epsilon_{abcd}\epsilon^{ijkl}$ und Kontraktionen sind affine Tensoren, und zwar Tensorprodukte von δ

Tensoranalysis

Tensorfelder: $T'^{i\dots}_{k\dots}(x') = L^i_m \dots L^n_k \dots T^{m\dots}_{n\dots}(x)$

Differentiation: $\partial_j T^{i\dots}_{k\dots}(x) = D^{i\dots}_{jk\dots}$, Typ $(p, q+1)$

Gaußscher Integralsatz: $\int_G d^4x \partial_i T^{i\dots}_{k\dots} = \int_{\partial G} d\sigma_i T^{i\dots}_{k\dots}$, gilt nicht nur für Tensorfelder.

7 Relativistische Elektrodynamik

7.1 Nachweis der Kovarianz

Feldtheorie: Feldkonzept ersetzt retardierte Fernwirkung von Teilchen; mathematisch einfacher, obwohl klassisch im Prinzip verzichtbar; unerlässlich in der Quantentheorie

Elektromagnetismus beschrieben durch 6 Feldfunktionen: $\vec{E}, \vec{B}$

Grundgleichungen (im Gauß-System: $[q] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$, $[\vec{E}] = [\vec{B}]$)

Bewegungsgleichung (*Lorentzkraft*):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Feldgleichungen (*Maxwell-Gleichungen*):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Von diesen 8 Gleichungen sind 2 Bedingungen an die Anfangsdaten $\Rightarrow$ 6 Evolutionsgleichungen für 6 Funktionen.

Äquivalente Integralgleichungen folgen über die Sätze von Gauß und Stokes: Gauß'sches Gesetz, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$, Induktionsgesetz, Ampèresches Gesetz.

Einfache Konsequenzen: Coulombsches Gesetz $K_{12} = \frac{q_1 q_2}{r^2}$, Biot-Savartsches Gesetz

Elektromagnetische Wechselwirkung verletzt i. A. das 2. Newtonsche Axiom, keine Zentralkraft, geschwindigkeitsabhängig.

Vereinfachung durch *Potenzialansatz* ($c=1$):

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow) & & \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \\ (\operatorname{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \Rightarrow) & & \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{homogene Maxwell-Gleichungen} \\ \text{identisch erfüllt} \end{array}$$

inhomogene:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= -\Delta\phi - \operatorname{div} \dot{\vec{A}} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \cancel{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}} - \Delta \vec{A} = \cancel{\vec{\nabla} \phi} - \ddot{\vec{A}} + 4\pi \vec{j}\end{aligned}$$

Falls $\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$ (Lorenzbedingung) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\square\phi &= 4\pi\rho \\ \square\vec{A} &= 4\pi\vec{j}\end{aligned}$$

$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ d'Alembert-Operator

Erfüllbarkeit der Lorenzbedingung:

$$\left. \begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned} \right\} \text{„Eichtransformation“ ändert } \vec{E}, \vec{B} \text{ nicht}$$

$$0 = \frac{\partial\phi'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' \Rightarrow \square\Lambda = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}$$

ist (lokal) immer lösbar, Λ bestimmt nur bis auf Lösung von $\square\Lambda = 0$

$\square = \eta^{ik}\partial_i\partial_k = \partial^2$ ist invarianter Operator

Definition: 4-Potenzial $A^i = (\phi, \vec{A})$, Eichtransformation: $A_i \rightarrow A_i - \partial_i\Lambda$

Lorenzbedingung $\partial_i A^i = 0$ kovariante Gleichung, falls A 4-Vektor

hatten 4-Stromdichte $j = (\rho, \vec{j})$

$\Rightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\square A^i = 4\pi j^i$$

$\Rightarrow A$ 4-Vektor, weil j 4-Vektor

(in Quantenmechanik ist $e^{iq\oint A_i dx^i}$ beobachtbar)

(ohne Eichbedingung: $A^i{}_{,k}{}^k - A^k{}_{,k}{}^i = 4\pi j^i$)

Kovariante Darstellung der Feldstärken

$$\begin{aligned}E_\alpha &= -\partial_\alpha A^0 - \partial_0 A^\alpha = -\partial_\alpha A_0 + \partial_0 A_\alpha \\ B_\alpha &= \partial_\beta A^\gamma - \partial_\gamma A^\beta = -\partial_\beta A_\gamma + \partial_\gamma A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ zyklisch})\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Definition Feldstärkentensor (Faraday-Tensor) $F_{ik} := \partial_i A_k - \partial_k A_i$

$$\Rightarrow (F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ & 0 & -B_3 & B_2 \\ & & 0 & -B_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

kontravariante Komponenten $F^{ik} = \eta^{im}\eta^{kn}F_{mn}$

$$\Rightarrow (F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ & 0 & -B_3 & B_2 \\ & & 0 & -B_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$F^{ik}F_{ik}$ und $\det(F_{ik})$ invariant $\Rightarrow \vec{E}^2 - \vec{B}^2$ und $(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$ Lorentzinvarianten

$$\partial_k F^{ik} = \partial_k (\partial^i A^k - \partial^k A^i) = -\square A^i \text{ falls } \partial_i A^i = 0$$

$\Rightarrow$ inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\partial_k F^{ik} = -4\pi j^i}$$

$\Rightarrow \partial_i j^i = 0$ (Kontinuitätsgleichung = Integrabilitätsbedingung für Maxwell-Gleichungen)

homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0} \quad (4 \text{ Gleichungen})$$

(im Formenkalkül: $dF = 0, d * F = -4\pi * j$)

Lorentzkraft

$q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ linear in Feldstärken und Geschwindigkeit $\Rightarrow$

$$\boxed{K^i = qF^{ik}u_k} = q\gamma(\vec{E} \cdot \vec{v}, \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

ist 4-Vektor, erfüllt $K^i u_i = 0$

$$\frac{dp^i}{ds} = K^i \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \vec{K}$$

ist exakt die ursprüngliche Bewegungsgleichung, wenn $\vec{p} = \text{relativistischer Impuls}$

Transformation der Feldstärken

$$F = (F^{ik}) \Rightarrow F' = LFL^T$$

Standard-Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 & E'_2 &= \gamma(E_2 - vB_3) & E'_3 &= \gamma(E_3 + vB_2) \\ B'_1 &= B_1 & B'_2 &= \gamma(B_2 + vE_3) & B'_3 &= \gamma(B_3 - vE_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für allgemeine Boosts gilt für Komponenten parallel und normal $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} E'_\parallel(x') &= E_\parallel(x) & B'_\parallel(x') &= B_\parallel(x) \\ \vec{E}'_\perp(x') &= \gamma \left(\vec{E}_\perp(x) + \vec{v} \times \vec{B}_\perp(x) \right) & \vec{B}'_\perp(x') &= \gamma \left(\vec{B}_\perp(x) - \vec{v} \times \vec{E}_\perp(x) \right) \end{aligned}$$

(beobachterabhängige Feldstärke-4-Vektoren: $E_i = F_{ik}u^k$, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}F^{jk}u_l$, s. Übungen)

Dualität

Dualer Feldstärketensor $F_{ik}^* = \frac{1}{2}\epsilon_{ikmn}F^{mn}$

$$\Rightarrow F_{ik}^* = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ & 0 & -E_3 & E_2 \\ & & 0 & -E_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow F^{**} = -F$; $* : \vec{E} \rightarrow -\vec{B}, \vec{B} \rightarrow \vec{E}$ lässt Vakuumfeldgleichungen invariant

Mit Quellen: $F^{*ik}_{,k} = 0$, $F_{ij,k}^* + F_{ki,j}^* + F_{jk,i}^* = 4\pi\epsilon_{ijkl}j^l$

Gäbe es magnetische Ladungen, wären die Maxwell-Gleichungen auch mit Materie dualitätssymmetrisch:

$$\begin{aligned} F^{ik}_{,k} &= -4\pi j^i, & F_{ij,k} + F_{ki,j} + F_{jk,i} &= 4\pi\epsilon_{ijkl}\tilde{j}^l \\ F^{*ik}_{,k} &= 4\pi\tilde{j}^i, & F_{ij,k}^* + F_{ki,j}^* + F_{jk,i}^* &= 4\pi\epsilon_{ijkl}j^l \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\tilde{\rho}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 4\pi\tilde{j}, \quad \partial_i\tilde{j}^i = 0$$

invariant unter $*$ und $j \rightarrow -\tilde{j}, \tilde{j} \rightarrow j$

Allerdings gibt es dann keine homogenen Maxwell-Gleichungen mehr $\Rightarrow$ Potenzial existiert nur noch lokal außerhalb $\operatorname{supp} \tilde{j}$

z.B.: magnetischer Monopol: A singulär auf dem „Dirac String“ = Linie vom Ort des Monopols ins Unendliche (allerdings existiert in diesem Fall $\tilde{A}$ mit $\tilde{F}_{ik} = \partial_i \tilde{A}_k - \partial_k \tilde{A}_i$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \tilde{\phi}$)

verallgemeinerte Lorentzkraft:

$$K^i = qF^{ik}u_k - \tilde{q}F^{*ik}u_k$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \tilde{q}(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E})$$

Eindeutigkeit der Wellenfunktion eines Teilchens mit Ladung q im Feld einer magnetischen Ladung $\tilde{q} \Rightarrow$ Dirac-Quantisierungsbedingung $q\tilde{q} = \frac{n}{2}\hbar c$. (Tatsächlich folgt die Quantisierung der elektrischen Ladung auch ohne die Annahme der Existenz von magnetischen Monopolen aus der quantenmechanisch begründbaren Eigenschaft, dass die Eichfunktion Λ eine fundamentale Mehrdeutigkeit der Form $e_0\Lambda \sim e_0\Lambda + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, aufweist. Alle Ladungen müssen auf Grund dessen ein ganzzahliges Vielfaches von e_0 sein.)

Magnetische Monopole bisher nicht nachgewiesen (ein singuläres Ereignis 1987).

7.2 Energie-Impuls des Feldes

Betrachten Ladungsverteilung mit 4-Stromdichte j

Lorentzkraft überträgt auf Materie 4-Impuls, und zwar in einem Raum-Zeit-Gebiet $G = I \times V$, I infinitesimal

$$\begin{aligned} dP_{\text{mat}}^i &\stackrel{\text{Beh.}}{=} \int_G T_{\text{mat},k}^{ik} d^4x \\ &= dt \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \pi_{\text{mat}}^i + T_{\text{mat},\alpha}^{i\alpha} \right) d^3x \\ &= dt \underbrace{\left(\int_V \frac{\partial \pi_{\text{mat}}^i}{\partial t} d^3x + \int_{\partial V} T_{\text{mat}}^{i\alpha} dF^\alpha \right)}_{\text{Bew: Netto-Rate des in } V \text{ produzierten Impulses, } = 0 \text{ ohne äußere Kraft}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_{\text{mat},k}^{ik} =$ Dichte der vom Feld auf Materie übertragenen Kraft = Lorentzkraftdichte
 $\kappa^i \stackrel{!}{=} -\text{Änderung des 4-Impulses des Feldes} / \text{Zeit} \cdot \text{Volumen} = -T_{\text{em},k}^{ik}$

Lorentzkraftdichte $\kappa^i = F^{ik}j_k$

(ersetze in der Lorentzkraft q durch $\rho^* \Rightarrow qu$ zu ersetzen durch $j = \sum_A \rho_A^* u_A$ für

Ladungsverteilung mit mehreren Komponenten, ρ_A^* ...Ladungsdichte im jeweiligen Ruh-system)

$$\begin{aligned}
 -F^{ik}j_k &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} + \frac{1}{4\pi} F^{ik} F_k{}^l{}_{,l} = \frac{1}{4\pi} (F^{ik} F_k{}^l)_{,l} - \frac{1}{4\pi} \underbrace{F^i{}_{k,l}}_{\frac{1}{2}(F^i{}_{k,l} - F^i{}_{l,k})} F^{kl} \\
 &\quad (F_{ik,l} + F_{li,k} = -F_{kl,i} \Rightarrow \underbrace{F^i{}_{k,l} - F^i{}_{l,k}}_{= -F_{kl}{}^i} = -F_{kl}{}^i) \\
 &= \frac{1}{4\pi} (F^{ik} F_k{}^l + \frac{1}{4} \eta^{il} F^{km} F_{km})_{,l}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_{\text{em}}^{ik} = \frac{1}{4\pi} (F^{ij} F_j{}^k - \frac{1}{4} \eta^{ik} F^{mn} F_{nm})$ Maxwell-Tensor, Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

(mathematisch bestimmt nur bis auf Addition von $f^{ikl}{}_{,l}$ mit $f^{ikl} = -f^{ilk}$, aber *physikalisch eindeutig* als algebraische Funktion der Feldstärken)

T_{em}^{ik} ist *symmetrisch* und *spurfrei*.

Tatsächlich lässt sich T^{ik} auch ohne Verwendung der Lorentzkraft gewinnen (z.B. aus dem kanonischen Energie-Impuls-Tensor, siehe Kapitel 8). Die Lorentzkraft folgt dann aus der Energie-Impulserhaltung des Systems Materie $\times$ Feld: $T_{\text{em},k}^{ik} + T_{\text{mat},k}^{ik} = 0$

Drehimpuls

Elektromagnetische Wechselwirkung ist keine Zentralkraft $\Rightarrow$ nur $L_{\text{mat}}^{ik} + L_{\text{em}}^{ik}$ erhalten.

7.3 Strahlungsrückwirkung einer kompakten Stromverteilung

j 4-dimensional kompakt $\Rightarrow Q = 0$.

Allgemeine Lösung von $\square A^i = 4\pi j^i$ mit Greenfunktion G

$$\square G(x) = \delta^{(4)}(x) \quad \Rightarrow \quad A^i = 4\pi \int d^4 x' G(x - x') j^i(x')$$

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ikx}}{k^2}$$

nicht eindeutig wegen Polen in $k^0 = \pm |\vec{k}|$

Bevorzugte Lösung:

$$G^{\text{ret}}(x) = \frac{\delta(r-t)}{4\pi r} = \Theta(t) \frac{\delta(x^2)}{2\pi}$$

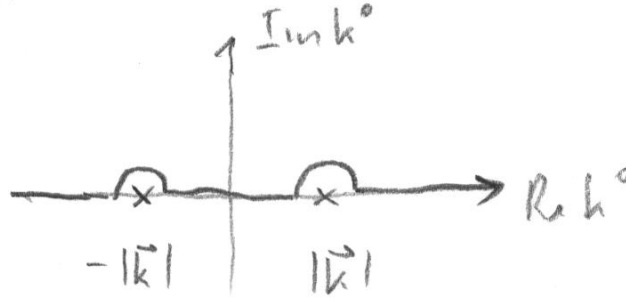


Abbildung 7.1: Zur retardierten Greenfunktion

$$\Rightarrow A(x) = \underbrace{4\pi \int d^4x' G^{\text{ret}}(x-x') j(x')}_{A^{\text{ret}}(x)} + A^{\text{ein}}(x) = \int d^3x' \frac{j(t-|\vec{x}-\vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + A^{\text{ein}}(x)$$

Energie-Impulsänderung einer Stromverteilung durch Feldeinwirkung

$$P_{\text{mat}}^i(\infty) - P_{\text{mat}}^i(-\infty) = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F^{ik} j_k, \quad F = F^{\text{ein}} + F^{\text{ret}}$$

$$\int d^4x F^{\text{ret}, ik} j_k = \int d^4x j_k(x) \int d^4x' \left[\partial^i G^{\text{ret}}(x-x') j^k(x') - \underbrace{\partial^k G^{\text{ret}}(x-x') j^i(x')}_{\substack{0 \text{ nach part. Int. bez. } x \\ (j \text{ habe kompakten Träger})}} \right]$$

Vom ersten Term trägt nur der in x und x' symmetrische Anteil bei:

$$\frac{1}{2} (\partial_i G^{\text{ret}}(x-x') + \underbrace{\partial'_i G^{\text{ret}}(x'-x)}_{\substack{-\partial_i \\ G^{\text{av}}(x-x')}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} G(x-x'), \quad G \equiv G^{\text{ret}} - G^{\text{av}}$$

$$G(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2) [\Theta(k^0) - \Theta(-k^0)] e^{-ikx}$$

Mit $F^{\text{rad}} := F^{\text{ret}} - F^{\text{av}} = \underbrace{F^{\text{aus}}}_{=F-F^{\text{av}}} - F^{\text{ein}}$ (Strahlungsfeld) ist

$$P_{\text{mat}}^i(\infty) - P_{\text{mat}}^i(-\infty) = \int_{\mathbb{R}^4} \left(F^{\text{ein}, ik} + \underbrace{\frac{1}{2} F^{\text{rad}, ik}}_{\substack{\text{Beitrag der} \\ \text{Strahlungsrückwirkung}}} \right) j_k d^4x.$$

7.4 Strahlungsrückwirkung einer Punktladung

Feld einer Punktladung

Weltlinie $z(s) \Rightarrow$

$$j^i(x) = q \int_{-\infty}^{\infty} ds \delta^{(4)}(x - z(s)) \dot{z}^i(s) \quad (\ddot{U})$$

$$\begin{aligned} A^{\text{ret}, i}(x) &= 4\pi \int d^4x' G^{\text{ret}}(x - x') j^i(x') \\ &= 4\pi q \int_{-\infty}^{\infty} ds \dot{z}^i(s) G^{\text{ret}}(x - z(s)) \\ &= 2q \int_{-\infty}^{s_1} ds \dot{z}^i(s) \delta(\underbrace{(x - z(s))^2}_y) \\ &= q \frac{\dot{z}^i(s_0)}{(x - z(s_0)) \dot{z}(s_0)} \quad (\text{Liénard-Wiechert-4-Potential}) \end{aligned}$$

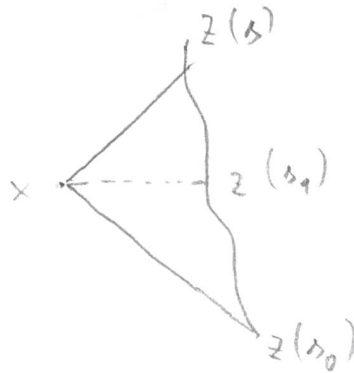


Abbildung 7.2: Zur Definition von s_0 und s_1

s_1 definiert durch $z^0(s_1) = x^0$, s_0 definiert durch $(x - z(s_0))^2 = 0$, $x^0 > z^0(s_0)$

Haben verwendet

$$G^{\text{ret}}(x) = \frac{\Theta(x^0)}{2\pi} \delta(x^2), \quad \delta(y^2(s)) \Big|_{s < s_1} = \frac{\delta(s - s_0)}{|2y\dot{y}|_{s=s_0}}$$

Interessieren uns für die Abstrahlung ins Unendliche:

$$A^{\text{ret}} \rightarrow F^{\text{ret}} \rightarrow T^{\text{ret}} \rightarrow \Delta P_{\infty}^i = \int_{K_{\infty}} T^{\text{ret}, ik} d\sigma_k$$

der während der Eigenzeit $\Delta s = s_2 - s_1$ ins Unendliche abgestrahlte Energie-Impuls (zu seiner Berechnung genügt die Kenntnis von F^{ret} bzw. T^{ret} in der Fernzone)

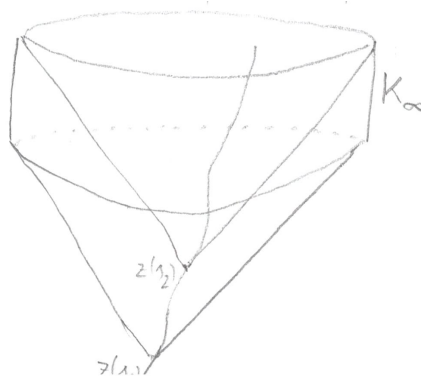


Abbildung 7.3: Zur Definition von K_{∞}

Klassische Larmor-Formel:

$$\frac{dE_{\infty}}{dt} = \frac{2}{3} q^2 \left(\frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} \right)^2$$

hat die eindeutige Kovariantisierung:

$$\frac{dP_{\infty}^i}{ds} = -\frac{2}{3} q^2 \dot{z}^i \ddot{z}^2$$

Energie-Impulsstrom ins Unendliche = Strahlungsleistung (relativistische Larmor-Formel, reduziert sich für $i = 0$ im Ruhssystem des Teilchens auf die klassische)

Strahlungsrückwirkung:

$$m \ddot{z}^i \stackrel{?}{=} +\frac{2}{3} q^2 \dot{z}^i \ddot{z}^2 \quad \left(\text{NR : } m \ddot{\vec{z}} = -\frac{2}{3} q^2 \dot{\vec{z}} (\ddot{\vec{z}})^2 \rightarrow \text{Reibungskraft} \right)$$

kann nicht stimmen, weil $\ddot{\vec{z}} \perp \dot{\vec{z}}$.

Physikalischer Grund: das Teilchen gibt auch an die *Nahzone* Energie-Impuls ab.

Eindeutige Vervollständigung der rechten Seite:

$$0 = (\dot{\vec{z}} \ddot{\vec{z}})^{\cdot} = \ddot{\vec{z}}^2 + \dot{\vec{z}} \cdot \ddot{\vec{z}} \Rightarrow \dot{\vec{z}} \ddot{\vec{z}}^2 + \ddot{\vec{z}} \text{ ist } \perp \dot{\vec{z}}$$

$$\rightarrow m\ddot{z}^i = \frac{2}{3}q^2(\dot{z}^i\ddot{z}^2 + \ddot{z}^i) \quad (\text{Lorentz-Dirac-Gleichung})$$

Physikalische Herkunft des Terms $\ddot{z}$: Im Ruhssystem des Teilchens ist

$$\vec{E} = \frac{q}{r} \left[\frac{\vec{n}}{r} - \ddot{\vec{z}}^{\text{ret}} + (\ddot{\vec{z}}^{\text{ret}} \cdot \vec{n})\vec{n} \right], \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{x}}{r}.$$

Mittelung über alle Richtungen:

$$\int d\Omega n_\alpha = 0, \quad \int d\Omega n_\alpha n_\beta = \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ Am Teilchenort ist

$$\langle \vec{E} \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \frac{q}{r} \ddot{\vec{z}}^{\text{ret}}$$

$$\ddot{\vec{z}}^{\text{ret}}(t) = \ddot{\vec{z}}(t-r) = \ddot{\vec{z}}(t) - r \dddot{\vec{z}}(t)$$

$$\Rightarrow q \langle \vec{E} \rangle = \underbrace{-\frac{2}{3} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q^2}{r} \ddot{\vec{z}}}_{-\delta m \ddot{\vec{z}}, \text{ Bremskraft}} + \frac{2}{3} q^2 \dddot{\vec{z}}$$

Einsetzen in $m_0 \ddot{\vec{z}} = q \langle \vec{E} \rangle \Rightarrow$

$$\underbrace{(m_0 + \delta m)}_{m \text{ renormierte Masse}} \ddot{\vec{z}} = \frac{2}{3} q^2 \dddot{\vec{z}}$$

renormierte Masse endlich, falls $m_0 \rightarrow -\infty$; Interpretation: δm = Feldenergie der Ladung $= \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3x \rightarrow \infty$

Kovariant: $m\ddot{z}^i = \frac{2}{3}q^2\ddot{z}^i$ ist inkonsistent, eindeutige Ergänzung der rechten Seite zu 4-Kraft $K \perp \dot{z}$ liefert $m\ddot{z}^i = \frac{2}{3}q^2(\ddot{z}^i + \dot{z}^i\ddot{z}^2)$ wie gehabt.

Zusammenfassung: Die Lorentz-Dirac-Kraft hat einen Beitrag aus der Fernzone (irreversibel) und einen aus der Nahzone, dieser ist reversibel (wegunabhängig), weil $\ddot{z}$ eine totale Ableitung: der abgegebene Energie-Impuls kann wieder absorbiert werden, nachdem er in der Nahzone gespeichert wurde.

Die Massenrenormierung wird mathematisch wohldefiniert nur, wenn mit $r \rightarrow 0$ auch $q \rightarrow 0$ so dass $\frac{q^2}{r}$ und damit δm endlich bleibt. Außerdem $m \rightarrow 0$, damit $\frac{q}{m}$ endlich $\Rightarrow m_0 \rightarrow -\delta m$

Wenn der „Ruck“ $\ddot{\vec{z}}$ stärker als die Bremskraft ist, bewirkt er eine weitere Beschleunigung $\rightarrow$ *run-away-Lösungen* (Beschleunigung wächst exponentiell). Die Flucht der Teilchen lässt sich durch ein geeignetes äußeres Feld F^{ein} verhindern, das eine akausale „Vorbeschleunigung“ bewirkt.

Mit äußerem Feld lautet die renormierte Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z}^i = qF^{\text{ein}, ik}\dot{z}_k + \frac{2}{3}q^2 (\dot{z}^i\ddot{z}^2 + \dot{\ddot{z}}^i).$$

8 Relativistische Feldtheorien

Bosonen: lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung $\rightarrow$ Wellenlösungen. Einfachste: skalares Feld $\phi(x)$ erfüllt Feldgleichungen:

$$\square\phi + V'(\phi) = J(x) \quad (\text{Higgs, Inflaton})$$

$$V'(\phi) = \kappa^2\phi \quad (+\lambda\phi^3)$$

$$(\square + \kappa^2)\phi = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gl.}$$

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar}$$

m Masse der Feldquanten (strukturloses Punktteilchen, Spin 0)

Vektorfeld A^i :

$$\delta^k (\delta_k A_i - \delta_i A_k) + \kappa^2 A_i = 0 \quad (\text{Proca-Gleichung})$$

$$\Rightarrow \delta_i A^i = 0$$

$$\Rightarrow \text{Spin } 0$$

Maxwell-Feld = lineares masseloses Vektorfeld, abelsche Eichsymmetrie $\rightarrow$ Helizität 1

Nichtabelsche Eichfelder = Systeme von wechselwirkenden Vektorfeldern

Linearisiertes Gravitationsfeld = symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe, abelsche Eichsymmetrie $\rightarrow$ Helizität 2

Fermionen: Spinorfelder, Feldgleichungen 1. Ordnung, halbzahliger Spin

8.1 Wirkungsprinzip und Noether-Theorem

vgl. klassisches Punktteilchen:

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left[\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \right]}_{L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \text{ Lagrangefunktion}} = \begin{array}{l} \text{Min. über alle Geschichten} \\ \text{mit } \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 \text{ und } \vec{x}(t_2) = \vec{x}_2 \end{array}$$

Stationaritätsbedingung: $\delta S = 0 \Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung = Bewegungsgleichung

Verallgemeinerung auf allgemeine Feldtheorie, Felder ϕ_A (A ...Kollektion von Tensor- oder Spinorindizes):

$$S[\phi_A(x)] = \int_G d^4x \mathcal{L}(\phi_A, \phi_{A,i}) \quad \text{Wirkungsfunktional}$$

$\mathcal{L}$...Lagrangedichte, $\phi_A|_{\partial G}$ vorgegeben

Feldgleichungen aus Stationaritätsbedingung $\delta S = S[\phi_A + \delta\phi_A] - S[\phi_A] = 0$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_G d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \delta\phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \underbrace{\delta(\phi_{A,i})}_{=(\delta\phi_A)_i} \right] \\ &= \int_G d^4x \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \right)}_{\equiv \frac{\delta S}{\delta \phi_A}(x) \text{ Variationsableitung}} \delta\phi_A + \int_{\partial G} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \delta\phi_A d\sigma_i \end{aligned}$$

$\delta S = 0$, $\delta\phi_A|_{\partial G} = 0$, $\delta\phi_A$ ansonsten beliebig $\Rightarrow$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_A} = 0 \quad \text{Euler-Lagrange-Gln.} = \text{Feldgln.}$$

z.B.:

$$\begin{aligned} \phi_A &= A_i, \quad S_M[A_i] = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{ik} F^{ik} - \int d^4x A_i j^i \\ \frac{\delta S_M}{\delta A_i} &= 0 \Rightarrow \text{Maxwell-Gleichungen} \end{aligned}$$

S_M ist poincaréinvariant ($A_i \rightarrow L_i^k A_k + a_i$) und eichinvariant ($A_i \rightarrow A_i + \Lambda_{,i}$), falls $\partial_i j^i = 0$

Aus diesen Invarianzen folgen Erhaltungssätze. Das ist ein allgemeiner Sachverhalt:

$S[\phi_A] = \int \mathcal{L} d^4x$ ändere sich unter $\phi_A \rightarrow \phi_A + \delta\phi_A$ mit $\delta\phi_A = \epsilon f_A(\phi, \partial\phi, x)$, ϵ konstant, nur um einen Randterm $\delta S = \int_{\partial G} C^i d\sigma_i$. Diese Modifikation der Wirkung lässt die Feldgleichungen invariant, weil das Wirkungsprinzip im Gegensatz zur hier betrachteten Symmetrietransformation das Verschwinden der Feldvariation am Rand voraussetzt. Die eben definierte Symmetrie der Wirkung setzt aber nicht voraus, dass die Feldgleichungen erfüllt sind. Unter Verwendung des allgemeinen Ausdrucks für δS , den wir bei der Herleitung der Feldgleichungen erhalten haben, bewirkt eine Symmetrietransformation daher

$$\delta S = \int_G \frac{\delta S}{\delta \phi_A} \delta \phi_A d^4 x + \int_{\partial G} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \delta \phi_A d\sigma_i = \int_{\partial G} C^i d\sigma_i.$$

Setzen wir nun die Feldgleichungen voraus, verschwindet der erste Term und es folgt

$$\int_{\partial G} J^i d\sigma_i = 0 \text{ mit } J^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \delta \phi_A - C^i.$$

Wegen der Beliebigkeit von G folgt $\partial_i J^i = 0$ und, wenn J^i räumlich lokalisiert ist, die Existenz einer Erhaltungsgröße ("Noetherladung") $\int_{\Sigma} J^i d\sigma_i$.

Das ist die Aussage des (1.) *Noether-Theorems*: Zu jeder Symmetrie (1-parametrische Invarianzgruppe der Wirkung erzeugt von einer Feldtransformation f) gibt es einen erhaltenen Strom („Noetherstrom“), falls die Feldgleichungen erfüllt sind.

$\Rightarrow$ Es existiert eine Erhaltungsgröße $\int_{\Sigma} J^i d\sigma_i$, falls J räumlich lokalisiert ist.

(Das 2. *Noether-Theorem* erweitert diesen Sachverhalt auf Invarianzen, die durch eine freie Funktion charakterisiert sind. Z.B. Invarianz von S_M unter Eichtransformation $\Rightarrow \partial_i j^i = 0 \Rightarrow$ Erhaltung der elektrischen Ladung.)

Z.B. Translationssymmetrie:

Wir ersetzen in der Lagrangedichte $\phi_A(x)$ durch $\phi_A(x+\epsilon) = \phi_A(x) + \epsilon^i \phi_{A,i}$, d.h. ϕ_A wird translatiert, G aber nicht (oder umgekehrt). (Alternativ kann man ϕ_A und G gemeinsam translatieren (aktiv oder passiv). Dann ist $C^i = 0$, aber die folgende Rechnung wird etwas länger.)

Wenn $\mathcal{L}$ nur über ϕ_A von x abhängt (Translationsinvarianz der Wirkung), folgt $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon^i \mathcal{L}_{,i}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta S &= \int_G \epsilon^i \mathcal{L}_{,i} d^4 x = \int_{\partial G} \mathcal{L} \epsilon^i d\sigma_i \\ \Rightarrow J^k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,k}} \epsilon^i \phi_{A,i} - \epsilon^k \mathcal{L} \equiv \epsilon^i \Theta_i^k \\ \Rightarrow \Theta_i^k &= \phi_{A,i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,k}} - \delta_i^k \mathcal{L} \text{ erfüllt } \Theta_i^k{}_{,k} = 0. \end{aligned}$$

Der Tensor Θ_i^k heißt *kanonischer Energie-Impuls-Tensor*.

z.B. Maxwell:

$$\begin{aligned} \phi_A &= A_a, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab} \Rightarrow \\ \Theta_i^k &= A_{a,i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{a,k}} - \delta_i^k \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{16\pi} A_{a,i} \cdot 2 \left(F^{ka} - F^{ak} \right) - \delta_i^k \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{A_{a,i} F^{ak}}_{\neq F_{ia}} + \frac{1}{4} \delta_i^k F_{ab} F^{ab} \right) \end{aligned}$$

weder symmetrisch noch eichinvariant.

Aber Θ_i^k ist symmetrisierbar: $\exists$ Tensorfeld $f_i^{jk} = -f_i^{kj}$, so dass $T_i^j = \Theta_i^j + f_i^{jk}_{,k}$ symmetrisch.

$\Rightarrow T_{i,j}^j = 0$, P^i dasselbe.

Beweis:

$$\int_{\Sigma} f_i^{jk}_{,k} d\sigma_j = \int_{\partial\Sigma} \underbrace{f_i^{jk} d\sigma_{jk}}_{\text{2-dim. Flächenelement}} = 0$$

falls f_i^{jk} lokalisiert.

Forderung der Eichinvarianz von T^{ik} führt auf $T_{\text{e.m.}}^{ik}$.

Analog: Lorentzinvarianz der Wirkung $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung.

Betr. infinitesimale Lorentztransformation: $x^i \rightarrow x^i + \omega^i_k x^k$, $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ ($\epsilon^i \rightarrow -\omega^i_k x^k$)

(weil $L = e^A$, $L^T \eta L = \eta \Rightarrow \eta L \eta = (L^T)^{-1} \Rightarrow e^{\eta A \eta} = e^{-A^T} \Rightarrow \eta A \eta = -A^T$ oder $\eta A = -(\eta A^T) \Rightarrow L = e^{\eta \Omega}$ mit $\Omega = \eta A$ antisymmetrisch, $\Omega \equiv (\omega_{ik})$)

Allgemeines Transformationsverhalten von ϕ_A unter einer Lorentztransformation:

$$\phi_A(x) \rightarrow R_A^B(L) \phi_B(L^{-1}x), \quad R_A^B = \delta_A^B - \frac{i}{2} \omega_{jk} \hat{S}^{jk}_A{}^B$$

mit den *Spinmatrizen* $\hat{S}^{jk}$ für das Feld ϕ_A

$$\Rightarrow \phi_A(x) \rightarrow \phi_A(x - \Omega x) - \frac{i}{2} \omega_{jk} \hat{S}^{jk}_A{}^B \phi_B \equiv \phi_A(x) + \delta \phi_A(x)$$

sei Symmetrie der Wirkung.

$$\Rightarrow \delta S = - \int_G \underbrace{\mathcal{L}_{,i} \omega^i_k x^k}_{(\mathcal{L} \omega^i_k x^k)_{,i} - \underbrace{\mathcal{L} \omega^i_k \delta^k_i}_0} d^4x = - \int_{\partial G} \mathcal{L} \omega^i_k x^k d\sigma_i$$

$$\Rightarrow J^l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,l}} \left(-\phi_{A,i} \omega^i_k x^k - \frac{i}{2} \omega_{ik} \hat{S}^{ik}_A{}^B \phi_B \right) + \mathcal{L} \omega^l_k x^k \equiv \frac{1}{2} \omega_{ik} j^{ikl}$$

mit der *kanonischen Drehimpulsstromdichte*

$$j^{ikl} = x^i \Theta^{kl} - x^k \Theta^{il} + s^{ikl} \equiv l^{ikl} + s^{ikl},$$

$l^{ikl} \dots$ kanonische Bahndrehimpulsdichte,

$$s^{ikl} = -i \hat{S}^{ik}{}^B{}_A \phi_B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,l}} \dots \text{kanonische Spinstromdichte.}$$

Der erhaltene *kanonische Drehimpulstensor* ist die Summe aus dem *kanonischen Bahndrehimpulstensor* und dem *kanonischen Spintensor*:

$$J^{ik} = \int_{\Sigma} j^{ikl} d\sigma_l = L^{ik} + S^{ik}.$$

Symmetrisierung des EIT erfordert Modifikation des Spintensors:

$$\Theta^{ik} \rightarrow \Theta^{ik} + f^{ikl}{}_{,l}, \quad f^{ikl} = -f^{ilk}$$

J^{ik} darf sich nicht ändern $\rightarrow$

$$\begin{aligned} x^i f^{jkl}{}_{,l} - x^j f^{ikl}{}_{,l} + \Delta s^{ijk} & \text{ totale Divergenz} \\ & \stackrel{!}{=} \left(x^i f^{jkl} - x^j f^{ikl} \right)_{,l} \\ \Rightarrow \Delta s^{ijk} = f^{jki} - f^{ikj} & \Rightarrow \Delta S^{ij} \neq 0. \end{aligned}$$

Da $(\quad)_{,lk} = 0$, gilt weiter die Drehimpulserhaltung

$$\Theta^{ki} - \Theta^{ik} + s^{ikl}{}_{,l} = 0.$$

Für das *Maxwell-Feld* ist s^{ijk} ebenso wie Θ_{ik} nicht eichinvariant. Die Modifikation von Θ_{ik} zum Maxwell-Tensor bewirkt das Verschwinden der modifizierten Spinstromdichte (was damit zusammenhängt, dass Photonen nicht Spin, sondern *Helizität* 1 besitzen).

Falls s^{ijk} total antisymmetrisch ($\Rightarrow s^{ijk} = -s^{ikj}$), ist $f^{ikj} = -\frac{1}{2}s^{ikj}$ die „minimale“ Symmetrisierung ($f^{(ik)j} = 0$)

$$\Rightarrow \Delta s^{ijk} = -\frac{1}{2}(s^{jki} - s^{ikj}) = -s^{ijk}.$$

In diesem Fall modifiziert also die minimale Symmetrisierung S^{ik} ebenfalls zu 0, was für ein *Materiefeld* unphysikalisch erscheint.

Die ART erfordert aber für das Dirac-Feld genau das.

9 Speziell-relativistische Gravitationstheorie

= Linearisierung der ART

9.1 Lineare Feldtheorie der Gravitation

Newton

Skalares Gravitationspotenzial $V(t, \vec{x})$ erzeugt von Massendichte $\rho_{(m)}(t, \vec{x})$:

$$\Delta V = 4\pi G \rho_{(m)} \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V$$

Relativistische Verallgemeinerung

1. Versuch

$V \rightarrow$ Skalarfeld $V(x)$

Bewegungsgleichung: Ansatz $\ddot{x}^i \stackrel{?}{=} -V_{,i} \Rightarrow V_{,i} \dot{x}^i = 0 \quad \forall \dot{x} \Rightarrow V_{,i} = 0 \rightarrow V = \text{const} \rightarrow$ keine Wechselwirkung! Der Ansatz funktioniert nicht, weil $V(x)$ keine reparametrisierungsinvariante Erweiterung der freien Lagrangefunktion ist. $V_{,i} \dot{x}^i$ ist zwar reparametrisierungsinvariant, liefert aber ebenfalls keine Wechselwirkung, da totale Zeitableitung. Die einfachste nichttriviale reparametrisierungsinvariante Erweiterung der Wirkung ist $S[x(\tau)] = -m \int \sqrt{(1 + 2V(x)) \dot{x}^2} d\tau$ und liefert in der Tat für $V \ll 1$ die Newtonsche Bewegungsgleichung für massive Teilchen. Für masselose Teilchen ist die entsprechende Erweiterung $\tilde{S}[x(\lambda)] = -(1/2) \int (1 + 2V(x)) \dot{x}^2 d\lambda$, es ist aber leicht zu verifizieren, dass diese die freie Bewegung (Weltlinien = lichtartige Geraden) zur Folge hat. Masselose Teilchen koppeln also nicht an ein skalares Potenzial.

Feldgleichung: $\rho_{(m)} \rightarrow$ Skalar $T^i_i \stackrel{\text{Staub}}{=} \epsilon \stackrel{\text{N.R.}}{\approx} \rho_{(m)} \rightarrow \square V = -4\pi G T^i_i \quad (\approx -4\pi G \epsilon, \text{ falls } T^{\alpha\alpha} \ll T^{00})$

$\Rightarrow$ elektromagnetisches Feld ($T_i{}^i = 0$) erzeugt kein Gravitationsfeld $\Rightarrow$ kein Wechselwirkungsterm in der Wirkung $\Rightarrow$ auch kein Einfluss der Gravitation auf das elektromagnetische Feld (ebenso wie auf masselose Teilchen, vgl. oben). Tatsächlich wird aber Licht im Gravitationsfeld abgelenkt $\Rightarrow$ Widerspruch zum Experiment!

2. Versuch

Analogie Newtonsche Gravitation – Elektrostatik $\Rightarrow$

$V \rightarrow B^0$, 4-Vektorfeld B^i analog zur Maxwell-Theorie benötigt 4-Vektorfeld („Massenstromdichte“) als Quelle.

Aus T^{ik} kann (algebraisch) kein 4-Vektor gebildet werden. Eine Massenstromdichte lässt sich nur definieren, wenn ein lokales Ruhssystem ausgezeichnet ist (z.B. für ideales Fluid): $j_{(m)}^i = \epsilon^* u^i$, allgemeiner: wenn das System aus Komponenten mit wohldefinierten Ruhssystemen besteht. Für masselose Teilchen ist das sicher nicht der Fall. Selbst wenn $j_{(m)}$ existiert, ist es i.A. nicht erhalten.

Z.B. ideales Fluid: $j_{(m)}^i = \epsilon^* u^i \Rightarrow j_{(m),i}^i = 0$ gilt nur für $p = 0$ (weil dann $0 = T^{ik}{}_{,i} = (j_{(m)}^i u^k)_{,i} = j_{(m),i}^i u^k + \underbrace{\epsilon^* u^k}_{\dot{u}^k = a^k = 0} u^i$).

Schließlich müsste wegen des anziehenden Charakters der Gravitation

$$\square B^i = -4\pi G j_{(m)}^i \quad \Rightarrow \quad S_{\text{grav}}[B^i] = -\frac{1}{G} S_{\text{e.m.}}[B^i]$$

gelten $\Rightarrow$ Feldenergie nicht nach unten beschränkt (weil negativ definit)!

3. Versuch

Symmetrisches Tensorfeld ψ_{ik} , weil T_{ik} (makroskopisch) symmetrisch. Ansatz für Feldgleichungen: $\square \psi_{ik} = -\kappa T_{ik}$, Universalität der Gravitation $\Rightarrow T_{ik} = T_{ik}^{\text{tot}} \Rightarrow$

$$T^{ik}{}_{,k} = 0 \Rightarrow \psi_{ik}{}^{,k} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{stationär}} \Delta \psi_{00} = \kappa T_{00} \Rightarrow \text{Poisson-Gleichung, falls } T_{00} = \epsilon \approx \rho_{(m)}, \psi_{00} = \frac{\kappa}{4\pi G} V$$

$$\text{vgl. Maxwell-Gleichungen } \square A^i = 4\pi j^i, A^i{}_{,i} = 0 \rightarrow$$

Vermuten: ψ_{ik} sind verallgemeinerte Eichpotenziale, suchen eichinvariante Feldgrößen und Feldgleichungen für diese.

Beginnen mit symmetrischem Tensorfeld $h_{ik}(x) = h_{ki}(x)$ ($\neq \psi_{ik}$!) und Eichtransformationen $h_{ik} \rightarrow h_{ik} + \Lambda_{i,k} + \Lambda_{k,i}$ (die natürliche Verallgemeinerung von $A_i \rightarrow A_i + \Lambda_{,i}$).

Eichinvariante Feldgrößen: Können aus 1. Ableitungen nicht gebildet werden ($\Rightarrow \exists$ keine eichinvarianten Feldstärken!)

Die einfachste ist der *Gezeitentensor* (linearisierte *Riemann-Tensor*, Feldstärkengradient)

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &:= \partial_i(h_{jk,l} - h_{jl,k}) - \partial_j(h_{ik,l} - h_{il,k}) \\
&= -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}
\end{aligned}
\quad \begin{array}{l} \text{(Rotation bez. beider} \\ \text{Indizes von } h_{jk}!) \end{array}$$

Feldgleichungen:

- i) linear und eichinvariant
- ii) 2. Ableitungen von h_{ik}
- iii) Quellterm $\propto T_{ik}$

$\Rightarrow$ Die linke Seite muss ein symmetrischer Tensor 2. Stufe linear im Gezeitentensor sein

$\rightarrow$ allgemeinsten Ansatz:

$$G_{ik} = -\kappa T_{ik}$$

$$G_{ik} = R_{ik} + \lambda \eta_{ik} R$$

mit $R_{ik} := R^l{}_{ikl} = R_{ki}$ (linearisierter *Ricci-Tensor* = die bis auf Vorzeichen eindeutige nichttriviale Spur von R_{ijkl})

$R := R^i{}_i$ (linearisierter *Ricci-Skalar*)

Die linke Seite sollte $T_{ik}{}^{,k} = 0$ implizieren (vgl. Maxwell) $\Rightarrow G_{ik}{}^{,k} = 0$ muss identisch erfüllt sein. Diese Forderung legt λ fest:

$$R_{jk} = h_{jk,l}{}^l - h_{jl}{}^l{}_k - h_{lk}{}^l{}_j + h^l{}_{l,jk}, \quad h^l{}_l \equiv h \Rightarrow$$

$$R = 2(\square h - h_{kl}{}^{,kl})$$

$$\Rightarrow G_{jk}{}^{,k} = \cancel{\square h_{jk}{}^{,k}} - \cancel{\square h_{jl}{}^l{}_k} - h_{lk}{}^{,kl}{}_j + \square h_{,j} + 2\lambda(\square h_{,j} - h_{kl}{}^{,kl}{}_j) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}R$ heißt der linearisierte *Einstein-Tensor* ($\Rightarrow R_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}G^l{}_l \Rightarrow R = -G^l{}_l$),

$$\boxed{G_{ik} = -\kappa T_{ik}}$$

die linearisierten *Einstein-Gleichungen*.

Bestimmen κ erst nach Herleitung der

Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld

Gewinnen diese aus *Wirkungsprinzip* für Wechselwirkung Gravitationsfeld-Punktteilchen.
Im Fall einer vorgegebenen Quelle $T^{ik}(x)$ ist

$$S[h_{ab}] = S_{\text{grav}}[h_{ab}] - \int d^4x h_{ab} T^{ab}$$

mit $S_{\text{grav}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x Q$, Q eine quadratische Form in den 1. Ableitungen von h_{ab} , so dass

$$\frac{\delta S_{\text{grav}}}{\delta h_{ik}} = -\frac{1}{\kappa} G^{ik}.$$

Mit dynamischen Materiefeldern Φ_A ist

$$S[h_{ab}, \Phi_A] = S_{\text{grav}} + S_{\text{ww}}[h_{ab}, \Phi_A] + S_{\text{mat}}[\Phi_A]$$

$$T^{ik} = -\frac{\delta S_{\text{ww}}}{\delta h_{ik}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{ww}} = -h_{ik} T^{ik},$$

wenn T^{ik} nicht von h_{ab} abhängt.

Eichinvarianz von $S_{\text{ww}} \Rightarrow$

$$\Lambda_a T^{ab}{}_{,b} + \Lambda_b T^{ab}{}_{,a} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{ik}{}_{,k} = 0.$$

Für ein Punktteilchen mit Masse m und Weltlinie $z(s)$ ist

$$T^{ik}(x) = m \int ds \dot{z}^i \dot{z}^k \delta^{(4)}(x - z(s)) \quad (\ddot{U})$$

$$\Rightarrow S_{\text{ww}} = - \int d^4x h_{ik} T^{ik} = -m \int ds h_{ik}(z(s)) \dot{z}^i \dot{z}^k.$$

Die Bewegungsgleichung des Teilchens folgt aus

$$0 = \frac{\delta S}{\delta z^i(s)} = \frac{\delta}{\delta z^i(s)} (S_{\text{ww}} + S_{\text{mat}}) = -\frac{\delta}{\delta z^i(s)} \frac{m}{2} \int ds (\eta_{kl} + 2h_{kl}(z)) \dot{z}^k \dot{z}^l$$

$\Rightarrow S_{\text{ww}} + S_{\text{mat}}$ entsteht aus S_{mat} durch die Substitution

$$\eta_{ik} \rightarrow \eta_{ik} + 2h_{ik} \equiv g_{ik}(z(s))$$

$\Rightarrow$ Die Minkowski-Metrik wird zur ortsabhängigen effektiven Metrik $g_{ik}(x)$ „renormiert“, diese bestimmt die physikalische Geometrie der Raum-Zeit (Riemannsche Geometrie), die ein Punktteilchen „spürt“.

Müssen allerdings $|h_{ik}| \ll 1$ (schwaches Gravitationsfeld) voraussetzen, damit g_{ik} regulär bleibt und die Verwendung von η_{ik} in der Definition von R_{ij} konsistent ist (Vernachlässigung von in h_{ab} quadratischen Termen). Diese Voraussetzung ist nicht lorentzinvariant, zeichnet daher eine Klasse von Bezugssystemen aus. Tatsächlich liefert die Näherung des schwachen Gravitationsfelds („lineare Näherung“) bereits eine nichttriviale Verallgemeinerung der Newtonschen Gravitation. Wir begnügen uns daher hier mit dieser Näherung und verzichten auf die Entwicklung der Riemannschen Geometrie. Diese ist Bestandteil der ART.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrangefunktion $L(z, \dot{z}) = -\frac{m}{2} g_{kl}(z) \dot{z}^k \dot{z}^l$ sind

$$\underbrace{\frac{d}{ds} (g_{ik}(z(s)) \dot{z}^k)}_{\dot{z}^l \frac{\partial}{\partial z^l} + \ddot{z}^l \frac{\partial}{\partial \dot{z}^l}} = \frac{1}{2} g_{kl,i} \dot{z}^k \dot{z}^l$$

$$\Rightarrow g_{ik,l} \dot{z}^l \dot{z}^k + g_{il} \ddot{z}^l = \frac{1}{2} g_{kl,i} \dot{z}^k \dot{z}^l$$

$$\Rightarrow g_{il} \ddot{z}^l + \frac{1}{2} (g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}) \dot{z}^k \dot{z}^l = 0 \quad \begin{aligned} &| \cdot g^{ij} \equiv (g^{-1})^{ij} \\ &\approx \eta^{ij} - 2h^{ij}, \\ &h^{ij} := \eta^{im} \eta^{jn} h_{mn} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{z}^k \dot{z}^l = 0 \quad \text{„Geodätengleichung“}$$

$\Gamma_{kl}^j := \frac{1}{2} g^{ji} (g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i})$ heißt *Christoffel-Symbol*, physikalische Bedeutung: Gravitationsfeldstärken

Bemerkenswert: Die Gravitationsbeschleunigung ist quadratisch in der 4-Geschwindigkeit und nicht eichinvariant $\Rightarrow$ Eichtransformationen sind auch auf Koordinaten zu erstrecken (tatsächlich resultiert die Eichtransformation für h_{ab} aus einer infinitesimalen Koordinatentransformation)

$\ddot{z}^j \dot{z}_j \neq 0$ ist kein Widerspruch, weil η nicht mehr physikalisch (allerdings auch $g_{ik} \ddot{z}^i \dot{z}^k \neq 0$ – akzeptabel, weil $\ddot{z}$ nicht eichinvariant)

Der Newtonsche Grenzfall der Bewegungsgleichung

Falls h_{ik} nicht von t abhängt und $|\vec{v}| \ll 1$ ($\Rightarrow \dot{z}^0 \approx 1$):

$$\ddot{z}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha = 0$$

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} (-g_{00,\alpha}) = h_{00,\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = -\vec{\nabla} h_{00} \quad \Rightarrow \quad h_{00} = \frac{V}{c^2}$$

In unserem Sonnensystem sind die Voraussetzungen der Newtonschen Näherung sehr gut erfüllt: $h_{00} = \frac{V}{c^2}$ hat den Maximalwert auf der Sonnenoberfläche. Dort ist

$$\frac{V}{c^2} = \frac{GM_\odot}{R_\odot c^2} \equiv \frac{\mathcal{M}_\odot}{R_\odot} \approx 2 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

$$\mathcal{M}_\odot \approx 1,5 \text{ km} \quad R_\odot \approx 700000 \text{ km}$$

(Die Länge $2\mathcal{M} = \frac{2GM}{c^2}$ heißt Schwarzschildradius der Masse M .)

Der Newtonsche Grenzfall der Feldgleichungen

$$G_{jk} = \square h_{jk} - h_{jl}{}^{,l}{}_k - h_{lk}{}^{,l}{}_j + \underbrace{h_{,jk} - \eta_{jk}(\square h - h_{kl}{}^{,kl})}_{=\frac{1}{2}(h_{,jk} + h_{,kj})}$$

vereinfacht sich mit der *harmonischen Eichbedingung*

$$h_{il}{}^{,l} - \frac{1}{2} h_{,i} = 0 \quad (\text{lokal immer erfüllbar})$$

zu

$$G_{jk} = \square(h_{jk} - \frac{1}{2} \eta_{jk} h)$$

$$(\Rightarrow R_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} G = \square h_{ik} \stackrel{\text{Feldgl.}}{=} -\kappa(T_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} T_l{}^l))$$

Sei $\psi_{ik} := h_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} h$. „Spurumkehr“ (vgl. $R_{ik} \rightarrow G_{ik}$) ist Involution: $h_{ik} = \psi_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} \psi \Rightarrow \psi = -h$

$$(\Rightarrow \sqrt{-g} g_{ik} = \eta_{ik} + 2\psi_{ik})$$

$\Rightarrow$ Feldgleichung $\square\psi_{ik} = -\kappa T_{ik}$ falls $\psi_{ik}{}^{,k} = 0$ (harmonische Eichbedingung)

vgl. unseren ursprünglichen Ansatz!*

Für nichtrelativistischen Staub ist $T_{00} \approx \rho_{(m)}$, $T_{ik} \approx 0$ sonst

$$\stackrel{\text{Statik}}{\Rightarrow} \Delta\psi_{00} = \kappa\rho_{(m)}, \quad \psi_{ik} = 0 \text{ sonst}$$

$$\Rightarrow h_{00} = \frac{1}{2}\psi_{00} \text{ erfüllt } \underbrace{\Delta h_{00}}_{=V/c^2} = \frac{\kappa}{2}\rho_{(m)} \stackrel{!}{=} 4\pi G\rho_{(m)}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \text{ da } T_{00} = \epsilon \approx \rho_{(m)}c^2$$

außerdem ist $h_{\alpha\alpha} = +\frac{1}{2}\psi_{00} = +V/c^2$

Diese Lösung gilt ohne Einschränkung an die Geschwindigkeit von Testteilchen, enthält daher mehr Information als die Newtonsche Theorie. Sie wird daher das *statische Gravitationsfeld in 1. post-Newtonscher Näherung* genannt. Die entsprechende Raum-Zeit-Metrik ist

$$ds^2 = (1 + 2V(\vec{x}))dt^2 - (1 - 2V(\vec{x}))d\vec{x}^2$$

Inkonsistenz der linearen Näherung: h_{ik} hat einen nichtlinearen Energie-Impuls-Tensor quadratisch in $\partial h \Rightarrow h_{ik}$ koppelt an sich selbst und erfüllt Feldgleichungen mit quadratischen Termen $\Rightarrow$ diese Modifikation impliziert einen kubischen Term usw. $\rightarrow$ konsistente Erweiterung führt auf *nichtpolynomiale* Feldtheorie, die aber in Termen der Riemannschen Geometrie natürlich ist: die *allgemeine Relativitätstheorie* mit den Feldvariablen $g_{ik} = \eta_{ik} + 2h_{ik}$

9.2 Post-Newtonsche Effekte der Gravitation

$\rightarrow$ experimentelle Tests der ART

9.2.1 Rotverschiebung im stationären Gravitationsfeld

$$h_{ik} = h_{ik}(\vec{x})$$

physikalisches Linienelement

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0\alpha}dtdx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

* ψ_{ik} hat die einfachere Dynamik, h_{ik} die einfachere Kinematik.

$\Rightarrow$ für stationären Beobachter in $\vec{x}$ ist $ds = \sqrt{g_{00}(\vec{x})}dt$

Betrachten zwei stationäre Beobachter in $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und zwei Lichtsignale, die der erste zum zweiten mit zeitlichem Abstand Δt_1 sendet:

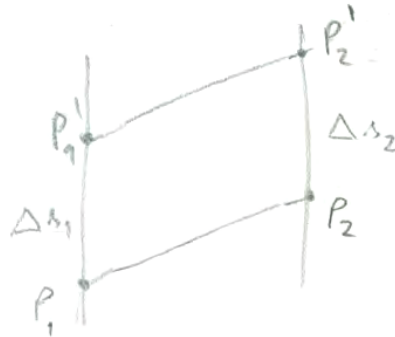


Abbildung 9.1: Skizze zur Rotverschiebung

Geodätengleichung enthält keine zeitabhängigen Koeffizienten und nur die Ableitung von $x^0 \Rightarrow$ mit $x^i(\lambda)$ ist auch $(x^0(\lambda) + \Delta t, \vec{x}(\lambda))$ Lösung

Gilt auch für lichtartige Lösungen („Nullgeodäten“)

$$\Rightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{\sqrt{g_{00}(\vec{x}_1)}}{\sqrt{g_{00}(\vec{x}_2)}}$$

$g_{00} = 1 + 2V(\vec{x}) \Rightarrow$ tiefer im Gravitationspotential vergeht die Zeit langsamer $\Rightarrow$ der Effekt ist nicht reziprok.

Für Lichtfrequenzen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\nu_2}{\nu_1} &= \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{x}_1)}{g_{00}(\vec{x}_2)}} \approx \frac{1 + V(\vec{x}_1)}{1 + V(\vec{x}_2)} \approx 1 - \frac{\Delta V}{c^2}, \quad \Delta V \equiv V(\vec{x}_2) - V(\vec{x}_1) \\ \Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_1} &= \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \approx -\frac{\Delta V}{c^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \nu \approx -\nu_1 \frac{\Delta V}{c^2}, \quad E_{\text{kin}} = h\nu \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\text{kin}} = -\frac{E_{\text{kin}}}{c^2} \Delta V \equiv -\Delta E_{\text{pot}}$$

$\rightarrow$ Energieerhaltung für ein Photon im Gravitationsfeld.

Verifiziert in Astrophysik (Weiße Zwerge), auf der Erde für Laserlicht ($\Delta z \sim 10\text{m}$), außerdem für Materiewellen (Neutronen, Atome: $\Delta z \sim 1\text{cm}$).

9.2.2 Lichtlaufzeitverzögerung (Shapiro-Effekt)

Statisches Gravitationsfeld in erster post-Newtonscher Näherung beschrieben durch das Linienelement

$$ds^2 = (1 + 2V)dt^2 - (1 - 2V)d\vec{x}^2$$

Entlang lichtartiger Weltlinien, insbesondere Nullgeodäten, ist $ds = 0 \Rightarrow$ physikalische Lichtgeschwindigkeit

$$c(\vec{x}) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \sqrt{\frac{1+2V}{1-2V}} \approx 1 + 2V(\vec{x}) < 1$$

$\Rightarrow$ im Vergleich zum (fiktiven) Minkowskiraum ist Licht langsamer, außerdem sind die Lichtstrahlen gekrümmt (keine Koordinatengeraden) $\Rightarrow$ Laufzeit größer als naiv zu erwarten.

Messbar mit Radarecho von Planeten, genauer mit Radiotranspondern auf Raumsonden (Cassini) und Planetenoberflächen (Viking, Mars) sowie Lunar Laser Ranging.

9.2.3 Lichtablenkung

Feld im Außenraum einer sphärisch-symmetrischen statischen Quelle mit Masse M beschrieben durch

$$ds^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)}_{e^{-\mu}} dt^2 - \underbrace{\left(1 + \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)}_{e^{\mu}} d\vec{x}^2 \quad \left(\mathcal{M} = \frac{GM}{c^2}\right)$$

Wirkungsprinzip für Geodäten:

$$\delta \int K d\tau = 0$$

$$K = g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = e^{-\mu} \dot{t}^2 - e^{\mu} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right)$$

$$\cdot \equiv \frac{d}{d\lambda}, \quad \lambda \text{ affiner Parameter}$$

Entlang Nullgeodäten ist $K = 0$.

Weitere Erhaltungsgrößen bez. zyklischer Koordinaten:

$$K \text{ u.a.v. } t \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial t} = 2e^{-\mu}\dot{t} \equiv 2E$$

$$K \text{ u.a.v. } \varphi \Rightarrow -\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = 2e^{\mu}r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \equiv 2l$$

O.B.d.A. Anfangsbedingungen $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \dot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$ (Euler-Lagrange)

$\Rightarrow$ Teilchenbahn in Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

Bewegungsgleichungen für $r(\lambda)$ nicht benötigt, weil $K = 0$ dieselbe Information enthält
 $\Rightarrow$ Nullgeodäten beschrieben durch 3 gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$e^{-\mu}\dot{t} = E, \quad e^{\mu}r^2\dot{\varphi} = l, \quad e^{-\mu}\dot{t}^2 - e^{\mu}\dot{r}^2 - e^{\mu}r^2\dot{\varphi}^2 = 0$$

Form der Bahnkurve (vgl. klassisches Keplerproblem):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$$

$$\dot{r}^2 = e^{-\mu} \left(e^{\mu} E^2 - e^{-\mu} \frac{l^2}{r^2} \right), \quad \dot{\varphi}^2 = e^{-2\mu} \frac{l^2}{r^4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^4 e^{\mu}}{l^2} \left(e^{\mu} E^2 - e^{-\mu} \frac{l^2}{r^2} \right)$$

Sei $u \equiv \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi}$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = e^{2\mu} \frac{E^2}{l^2} - u^2 = (1 + 4\mathcal{M}u) \frac{E^2}{l^2} - u^2$$

$$\Rightarrow \varphi = \int^u \frac{du'}{\sqrt{\frac{E^2}{l^2} + 4\mathcal{M}\frac{E^2}{l^2}u - u^2}} = \arcsin \frac{u - 2\mathcal{M}\frac{E^2}{l^2}}{\underbrace{\frac{E}{l} \sqrt{4\mathcal{M}^2 \frac{E^2}{l^2} + 1}}_{\approx 1}}$$

$\frac{l}{E} = d$ ist der Impaktparameter für Photonen (weil $\frac{l}{E} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = |\vec{x} \times \vec{v}| = v_{\infty} d = d$),
 $d \geq R$ für opaken Streuer mit Radius R .

$$V \ll 1 \Rightarrow R \gg 2\mathcal{M} \Rightarrow \sqrt{} \approx 1$$

$$\Rightarrow u = \frac{E}{l} \sin \varphi + 2\mathcal{M} \frac{E^2}{l^2} = \frac{1}{r_0} (1 + a \sin \varphi), \quad r_0 = \frac{l^2}{2\mathcal{M}E^2} = da$$

$$\Rightarrow r = \frac{r_0}{1 + a \sin \varphi}, \quad a = \frac{d}{2\mathcal{M}} \gg 1 \quad \rightarrow \text{Hyperbel}$$

$$a > 1 \Rightarrow r \rightarrow \infty \text{ für } \varphi \rightarrow \varphi_\infty \text{ mit } \sin \varphi_\infty = -\frac{1}{a}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} : \quad r = r_{\min} = \frac{r_0}{1 + a} = \frac{d}{\frac{1}{a} + 1}$$

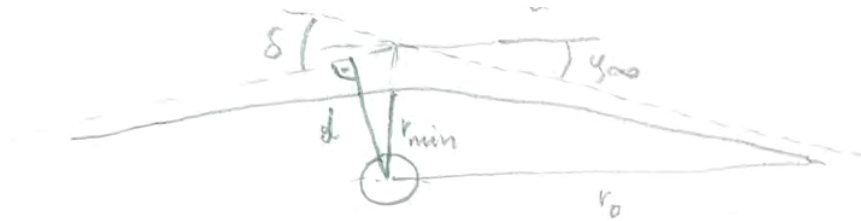


Abbildung 9.2: Skizze zur Lichtablenkung

Ablenkwinkel

$$\delta = -2\varphi_\infty \approx \frac{2}{a} = \frac{4\mathcal{M}}{d} \approx \frac{4\mathcal{M}}{r_{\min}} = 2\delta_{\text{Newton}}^*$$

Für einen den Sonnenrand streifenden Lichtstrahl ist

$$\delta_\odot = \frac{4\mathcal{M}_\odot}{R_\odot} = 1.75''$$

1. Messung 1919 (Sonnenfinsternisexpedition von Eddington)

HIPPARCOS (Satellit ~1985): nachweisbar für Sterne bis 90° Winkelabstand von der Sonne

GAIA: ab 2014

Genaueste Messung im Radiobereich mit VLBI: Der Quasar 3C273 wird regelmäßig von der Sonne verdeckt, die Brechung durch die Sonnenkorona ist zu berücksichtigen.

Konsequenz der Lichtablenkung: *Gravitationslinseneffekt*

Vernachlässigen die Ausdehnung der ablenkenden Masse und verwenden die *Kleinwinkelnäherung*: $\delta \ll 1 \Rightarrow$ Lichtweg kann durch zwei gerade Strecken genähert werden:

* Der Newtonsche Wert ergibt sich, wenn im Linienelement nur $g_{00} \neq 1$ berücksichtigt wird

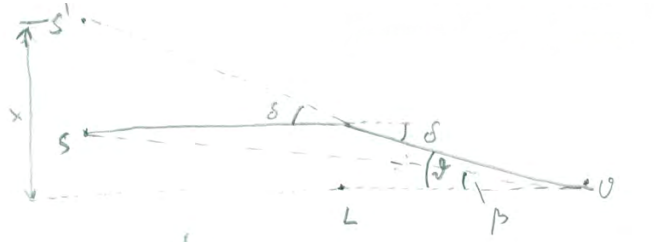


Abbildung 9.3: Kleinwinkelnäherung

$S \dots$ Lichtquelle

$L \dots$ ablenkende Masse („Linse“)

$O \dots$ Beobachter

$$x = \vartheta \underbrace{d_{OS'}}_{\approx d_{OS}} = \beta d_{OS} + \delta d_{LS}$$

$$\delta = \frac{4\mathcal{M}}{r_{\min}}, \quad r_{\min} = d_{OL}\vartheta$$

$$\Rightarrow \beta = \vartheta - \frac{4\mathcal{M}d_{LS}}{d_{OL}d_{OS}\vartheta} = \vartheta - \frac{\vartheta_E^2}{\vartheta} \quad \text{„Linsengleichung“ (einfachste Version)}$$

$$\vartheta_E := \sqrt{4\mathcal{M} \frac{d_{LS}}{d_{OL}d_{OS}}} \quad \text{„Einstein-Radius“}$$

Bei gegebener Quellposition β hat die Linsengleichung die Lösungen

$$\vartheta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \vartheta_E^2}$$

$$\Rightarrow \vartheta_+ > (\beta, \vartheta_E), \quad -\vartheta_E < \vartheta_- < 0$$

$\Rightarrow$ Die beiden Bildpunkte liegen diametral entgegengesetzt auf verschiedenen Seiten der Linse.

Falls $\beta = 0$, ist $\vartheta_{\pm} = \pm \vartheta_E \Rightarrow$ punktförmige Quelle erscheint als „Einstein-Ring“.

„Odd-number-Theorem“: Eine ausgedehnte transparente Gravitationslinse erzeugt i.A. eine ungerade Zahl von Bildern*.

Z.B. 2 Galaxien L, S mit $d_{OL} = 1000$ Mpc, $d_{OS} = 3000$ Mpc:

* wobei die Anzahl der orientierungserhaltenden Bilder um 1 größer ist als die der spiegelverkehrten

$$\vartheta_E \approx 1.8 \cdot \sqrt{\frac{M}{10^{12} M_\odot}} \text{ arcsec}$$

Anwendungen in der Kosmologie: absolute Entfernungsbestimmung aus Laufzeitdifferenz zwischen 2 Bildern.

Die von einer Gravitationslinse erzeugten Bilder sind verzerrt (weil ϑ nichtlinear von β abhängt) (außerdem ist ihre Helligkeit erhöht, was zum Phänomen des "Microlensing" von Sternen in unserer Galaxis führt).

Gilt generell für alle weit entfernten Quellen: „cosmic shear“ gestattet statistische Aussagen über den Vordergrund.

Für einzelne Sichtlinien ermöglicht *Tomographie* des Vordergrunds dreidimensionale Bestimmung der Massenverteilung und damit der Verteilung der *dunklen Materie*.

Weiterer klassischer Test der ART: Perihelverschiebung des Merkur (allgemeiner: *Periastronverschiebung*) wird durch lineare Näherung nicht vollständig beschrieben, weil auch ein Korrekturterm $2\frac{M^2}{r^2}$ in g_{00} beiträgt, der aus der Nichtlinearität der vollen Einstein-Gleichungen resultiert.

9.3 Gravimagnetismus („gravitomagnetism“)

Betrachten Quelle mit vernachlässigbarem Druck:

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} \epsilon & -\vec{S}^T \\ -\vec{S} & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{S}$...Energiestromdichte = Impulsdichte, weil $T_{ik} = T_{ki}$

Feldgleichungen für ψ_{ik} mit $\psi_{ik}^{,k} = 0$:

$$\square \psi_{0i} = -\kappa T_{0i} = -\kappa S_i$$

$$(S_i) \equiv (\epsilon, -\vec{S})$$

(kovariant: $S^i = T^i_k u^k$ ist die 4-Energiestromdichte gemessen vom Beobachter mit 4-Geschwindigkeit u)

Vgl. Maxwell-Gleichungen in Lorenz-Eichung:

$$\square A_i = 4\pi j_i$$

$$j_i = (\rho, -\vec{j})$$

$\Rightarrow$ formale Korrespondenz $A_i \leftrightarrow -\frac{1}{2}\psi_{0i} \equiv \mathcal{A}_i$, $j_i \leftrightarrow GS_i$

$\Rightarrow h_{0\alpha} = \psi_{0\alpha} \leftrightarrow -2A_\alpha$, $h_{00} = \frac{1}{2}\psi_{00} \leftrightarrow -A_0$

$\rightarrow$ „gravimagnetische“ Wechselwirkung von Energiestömen analog zum klassischen Magnetismus? Folgt tatsächlich aus den *Bewegungsgleichungen* im Feld mit $\psi_{\alpha\beta} = 0$ (Quelle druckfrei):

Behalten nur Terme linear in $\vec{v}$ ($\dot{x} \approx (1, \vec{v})$) $\Rightarrow$

$$S[x(s)] = -\frac{m}{2} \int ds \left(\eta_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \psi_{00} + 4\psi_{0\alpha} \dot{x}^\alpha \right)$$

vgl. Lorentzkraft:

$$S[x, s] = -\frac{m}{2} \int ds \dot{x}^2 - q \int A_i \dot{x}^i ds \quad (\ddot{U})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{q}{m} A_0 \rightarrow \frac{1}{2} \psi_{00} = -\mathcal{A}_0, \quad \frac{q}{m} A_\alpha \rightarrow 2\psi_{0\alpha} = -4\mathcal{A}_\alpha \\ \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = -\vec{\mathcal{E}} - 4\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} \text{ mit } \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} \mathcal{A}^0, \vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Mit der obigen Korrespondenz erhalten wir die Lorentzkraft mit $q = -m$ (Gravitationsanziehung) und 4-fach erhöhter magnetischer Kraft (*Gravimagnetismus*).

Gravimagnetismus liefert abstoßenden Beitrag zur Kraft, die zwei parallele Massenströme aufeinander ausüben (er wird aber von der Newtonschen Anziehung dominiert).

Testbare gravimagnetische Effekte

1. Beeinflussung von Satellitenbahnen um rotierende Zentralkörper: *Thirring-Lense-Effekt* (1918, Wien)
 - a) Präzession der Bahnebene = Wanderung des aufsteigenden Knotens in Rotationsrichtung. Verifiziert mit den beiden LAGEOS-Satelliten (~6000km hoch, Laser-Vermessung der Bahn 1993–2003): Vorhersage ($\approx 0.03''$ /Jahr) mit 10% Genauigkeit bestätigt. Genaueres Experiment ist im Gange: LARES.
 - b) Präzession der Periapsis = Änderung des Arguments der Periapsis (= Perigäum für Erdsatelliten): $0.05''$ /Jahr für LAGEOS

Die Effekte a) und b) werden von den gleichartigen, aber viel größeren Effekten überdeckt, die die Abweichung des Geoids von der Kugelgestalt (insbesondere das Massenquadrupolmoment J_2) schon gemäß der Newtonschen Theorie erzeugt.

2. *Spin-Spin-Wechselwirkung* = exaktes Analogon der Präzession eines rotierenden magnetischen Dipols (Elementarteilchen mit magnetischem Moment) im äußeren Magnetfeld, verursacht durch das Drehmoment

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{s} \dots$ Eigendrehimpuls des Dipols,

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{magnetisches Dipolmoment}$$

Gravimagnetische Entsprechung: $\vec{\mu} \rightarrow \vec{m}$, $\vec{B} \rightarrow -4\vec{\mathcal{B}}$ mit dem „gravimagnetischen Moment“

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{x} \times \vec{S}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{s},$$

weil $\vec{S} = \vec{\pi}$ (da im *stationären* Fall $\text{div } \vec{S} = 0$, kommt es auf die Wahl des Koordinatenursprungs nicht an).

($\Rightarrow$ gravimagnetischer Dipol = symmetrischer Kreisel)

Präzessionsgleichung:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = -\vec{m} \times 4\vec{\mathcal{B}} = 2\vec{\mathcal{B}} \times \vec{s}$$

$\Rightarrow$ gravimagnetische Präzessionsfrequenz $\vec{\Omega}_m = 2\vec{\mathcal{B}}$

In einem *frei fallenden Bezugssystem* hat ein Kreisel konstantes $\vec{s} \Rightarrow$ ein solches System *rotiert* i.A. relativ zum Koordinatensystem der linearen Gravitationstheorie, $\vec{\Omega}_m$ erzeugt durch „ferne rotierende Massen“: *Mitzieheffekt* („frame dragging“), ist im Einklang mit dem *Machschen Prinzip* (Trägheit = Konsequenz der Existenz ferner Massen). Allerdings wird $\vec{\Omega}_m$ dominiert von der *geodätischen Präzession*, die auch im statischen Feld vorhanden ist, siehe unten.

Erde: Eigendrehimpuls $\vec{J} \Rightarrow$ gravimagnetisches Moment $\vec{M} = \frac{1}{2}\vec{J}$, vgl. $\vec{\mathcal{B}} = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{\mu}}{r^3}$ ($\vec{n} \equiv \frac{\vec{x}}{r}$), $\vec{\mu} \rightarrow G\vec{M} \Rightarrow$

$$\vec{\Omega}_m = 2\vec{\mathcal{B}} = G \frac{3(\vec{J} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{J}}{r^3}$$

Zu klein, um unter Laborbedingungen zu messen.

Verifiziert durch Satellitenexperiment *Gravity Probe B* 2004/05 (vorgeschlagen von Schiff 1959): polare Umlaufbahn in 640km Höhe $\Rightarrow \Omega_m = 0.04''/\text{Jahr}$. Allerdings betrug die Messgenauigkeit wegen elektrostatischer Störeffekte nur ~10% statt der

erhofften 1% (die „Kreisel“ waren elektrostatisch aufgehängte supraleitende Kugeln). Die Präzession wurde relativ zur Position eines Fixsterns bestimmt. Dasselbe Experiment maß auch die

Geodätische Präzession

Im Ruhssystem eines frei fallenden Kreisels ist $\vec{B} = -\vec{v} \times \vec{\mathcal{E}}$, falls $|\vec{v}| \ll 1$.

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_{\text{ff}} = 2\vec{B} = -2\vec{v} \times \left(-\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 2\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dazu kommt die Thomas-Präzession, die auch im Fall von $\vec{\mathcal{E}} = 0$ vorhanden ist:

$$\vec{\Omega}_{\text{Th}} \approx -\frac{1}{2}\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (v \ll 1)$$

$$\vec{\Omega}_{\text{geod}} = \vec{\Omega}_{\text{ff}} + \vec{\Omega}_{\text{Th}} = \frac{3}{2}\vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{3}{2}\vec{v} \times \vec{\nabla} V$$

Gravity Probe B: $\Omega_{\text{geod}} \approx 6.6''/\text{Jahr}$

Auf einer polaren Umlaufbahn ist $\vec{\Omega}_m \perp \vec{\Omega}_{\text{geod}}$, sodass geodätische und gravimagnetische Spin-Präzession separiert werden konnten. Die geodätische Präzession des Erde-Mond-Systems im Gravitationsfeld der Sonne wird seit 1987 mit dem Lunar Laser-Ranging gemessen (relativ zu weit entfernten Quasaren, deren Positionen radioastronomisch mit VLBI (very long baseline interferometry) genau bestimmt werden können). (Da Mondbahn und Ekliptik nahe beieinander liegen, äußert sich die Präzession vorwiegend in einer Wanderung des Perigäums.)

9.4 Allgemeine Lösung der linearisierten Einstein-Gleichungen

a) *im Vakuum*: $\square h_{ik} = 0$

$\Rightarrow$ Gravitationswellen = mit Lichtgeschwindigkeit propagierende Störungen der Minkowski-Geometrie, kommen von fernen Quellen (Strahlern) als ebene Wellen auf der Erde an, nachweisbar über (sehr kleine, quasiperiodische) Abstandsänderungen: $\frac{\Delta l}{l} \lesssim 10^{-20}$

Aussichtsreichste Gravitationswellenantennen: Laser-Interferometer, bisher negativ.

b) *Lokalisierte Quellen*

Allgemeine Lösung mit retardierter Greenfunktion für $\square$

$$G^{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|)$$

$$\square G^{\text{ret}}(x) = \delta^{(4)}(x) \Rightarrow$$

$$h_{ik}(t, \vec{x}) = -2G \int d^3x' \frac{T_{ik}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') - \frac{1}{2}\eta_{ik}T_l{}^l(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + h_{ik}^{\text{ein}}(t, \vec{x})$$

Isoliertes System (konzentriert um $r \equiv |\vec{x}| = 0$), falls $r \gg$ Ausdehnung des Systems, ohne einlaufendes Feld:

$$h_{00}(t, r) = -\frac{2G}{r} \int d^3x' \left(T_{00} - \frac{1}{2}T_l{}^l \right)^{\text{ret}}$$

„Normale“ Materie: $p \ll \epsilon \Rightarrow T_l{}^l \approx T_{00} \Rightarrow$

$$V = h_{00} = -\frac{GM_{\text{in}}}{r}, \quad M_{\text{in}} = p^0 = \int d^3x T^{00}$$

$\Rightarrow$ aktive schwere Masse = träge Masse.

Allgemeiner gilt: Jede stationäre isolierte Energie-Impuls-Verteilung erzeugt das asymptotische Feld

$$h_{00} = -\frac{GM_{\text{in}}}{r}.$$