Übungen zu Relativitätstheorie I im WS 2015

Aufgabe 51

a) Zeigen Sie, dass Kausalität für ein Kontinuum die *Energiedominanzbedingung* $\epsilon \geq |\vec{S}|$ impliziert und diese Bedingung kovariant auf folgende Weise charakterisiert werden kann: $T^{ik}v_k$ ist zukunftsgerichtet und nicht raumartig für alle zeitartigen zukunftsgerichteten Vierervektoren v.

b) Unter welcher Voraussetzung erfüllt ein ideales Fluid die Energiedominanzbedingung?

Aufgabe 52

Verifizieren Sie, dass der Maxwell-Tensor die Energiedominanzbedingung erfüllt. Wann ist die beobachterbezogene Energiestromdichte (was bedeutet das?) $S^i = T^{ik}u_k$ lichtartig?

Aufgabe 53

Ein Elektron mit Spin $\vec{S}$ hat das magnetische Moment $\vec{\mu} = -\frac{e}{m}\vec{S}$. Es bewege sich im Inertialsystem I mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ in einem elektrischen Feld $\vec{E}$. Wie groß ist das Drehmoment, das auf das Elektron in dessen instantanem Ruhsystem I' wirkt? Wie groß ist unter der Voraussetzung $v \ll 1$ das Drehmoment in I? Schließen Sie aus diesem Drehmoment auf die entsprechende Wechselwirkungsenenergie U und drücken Sie diese für ein Elektron im Atom (Kernabstand r, effektive Kernladung q) unter Zuhilfenahme des Bahndrehimpulses $\vec{L}$ aus. Lösung:

$$U = \frac{qe}{2m^2r^3}\vec{S}\cdot\vec{L}.$$

Aufgabe 54

a) Zeigen Sie, dass das Wirkungsfunktional $S[\mathcal{C}] = -m\int_{\mathcal{C}} ds - q\int_{\mathcal{C}} A_i dx^i$ die Lorentzkraft impliziert. Anleitung: Spezialisieren Sie nach Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen auf die Eigenzeit als Parameter.

b) Zeigen Sie, dass die Wirkung $S[x(s)] = -\frac{m}{2}\int \dot{x}^2 ds - q\int A_i\dot{x}^i ds$ ebenfalls die Lorentzkraft impliziert und berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

Aufgabe 55

Sei $F := (F^i{}_j)$. Verifizieren Sie $FF^* = -(\vec{E}\cdot\vec{B})\mathbf{1}$.

Aufgabe 56

Verifizieren Sie mit derselben Notation wie in 55. $F^{*2} - F^2 = -\frac{1}{2}Tr(F^2)\mathbf{1}$. Schließen Sie daraus, dass der Energie-Impuls-Tensor $T^i{}_k$ des elektromagnetischen Feldes dualitätsinvariant ist.

Aufgabe 57

Verifizieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 55 die Identität

$$T^i{}_m T^m{}_k = \frac{1}{16\pi^2}[(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 + \frac{1}{4}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2]\delta^i{}_k.$$

Aufgabe 58

Die beiden Seiten der Identität aus Aufgabe 57 mögen nicht verschwinden. Zeigen Sie, dass dann der Poynting-Vektor des elektromagnetischen Feldes in einem beliebigen Punkt in einem geeigneten Bezugssystem verschwindet.