Übungen zu Relativitätstheorie I im WS 2015

Aufgabe 44

Verifizieren Sie, dass ein Punktteilchen mit Ladung q und beliebiger zeit- oder lichtartiger Weltlinie $z^i(\tau)$ die 4-Stromdichte $j^i(x) = q \int d\tau \dot{z}^i \delta^{(4)}(x - z(\tau))$ hat. Zeigen Sie auch direkt, dass j die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

Aufgabe 45

Verifizieren Sie, dass ein Punktteilchen mit beliebiger zeit- oder lichtartiger Weltlinie $z^i(\tau)$ und 4-Impuls $p(\tau)$ den Energie-Impuls-Tensor $T^{ik}(x) = \int d\tau p^i \dot{z}^k \delta^{(4)}(x - z(\tau))$ hat. Zeigen Sie direkt, dass die Erhaltung von p gleichbedeutend mit $T^{ik}{}_{,k} = 0$ ist.

Aufgabe 46

Geben Sie eine untere Schranke für die Ausdehnung R eines Körpers mit Masse M und Eigendrehimpuls $L \equiv |\vec{L}|$ in seinem Schwerpunktsytem unter der Voraussetzung $|\vec{\pi}| \leq \epsilon$.

Aufgabe 47

Bestimmen Sie den gemittelten Energie-Impuls-Tensor für ein System von N freien Punktteilchen der Masse m im dreidimensionalen Gebiet $\mathcal{V} \subset \{t = const\}$ (Volumen V) mit isotroper Geschwindigkeitsverteilung, indem Sie die Teilchen mit einem Index A ($A = 1, \ldots, N$) nummerieren, für jedes Teilchen den Energie-Impuls-Tensor aus Aufgabe 45 verwenden, über $\mathcal{V}$ mitteln und schließlich A durch den kontinuierlichen Index $\vec{v}$ sowie $\sum_A \ldots$ durch $N \int d^3v f(|\vec{v}|) \ldots$ mit $\int d^3v f = 1$ ersetzen. Dieser Energie-Impuls-Tensor beschreibt ein *ideales Gas*. Wie lautet dessen barotrope Zustandsgleichung im nichtrelativistischen und ultrarelativistischen Grenzfall?

Aufgabe 48

Leiten Sie die relativistische Euler-Gleichung für ein ideales Fluid aus $T^{ik}{}_{,k} = 0$ her.

Aufgabe 49

Ein ideales Fluid sei *stationär* (die Bestimmungsstücke hängen nicht von der Zeit ab) und *wirbelfrei*, d.h. $\epsilon_{ijkl} u^j u^{k,l} = 0$ (warum ist diese Bedingung die natürliche Verallgemeinerung der nichtrelativistischen Rotationsfreiheit?). Folgern Sie unter diesen Voraussetzungen aus der Euler-Gleichung die *relativistische Bernoulli-Gleichung*

$$ln\, u_0 + \int^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'} = const.$$

In welchem Spezialfall liefert sie die klassische Bernoulli-Gleichung?

Aufgabe 50

Zeigen Sie, dass der 1. Hauptsatz der Thermodynamik für ein ideales Fluid im Gleichgewicht auch in der Form

$$d\epsilon = \frac{\epsilon + p}{n} dn + nT ds$$

geschrieben werden kann, und folgern Sie daraus $\dot{s} \equiv s_{,i}\, u^i = 0$.