

Übungen zu Relativitätstheorie I im WS 2013

Aufgabe 42

Welche Operation mit Scharen von Hyperebenen entspricht der Addition zweier Kovektoren? (Es genügt, einen zweidimensionalen Vektorraum zu betrachten.)

Aufgabe 43

Bestimmen Sie für die Hyperboloide $\{x^2 = \pm a^2\}$ mit den Parametern x^1, x^2, x^3 das kovectorielle und skalare Hyperflächenelement, letzteres außerdem mit den Pseudopolarkoordinaten χ, θ, ϕ ($\chi \equiv \text{Artgh}(r/x^0)$ bzw. $\text{Artgh}(x^0/r)$, $r \equiv |\vec{x}|$).

Aufgabe 44

Gegeben sei eine Verteilung von gleich geladenen Teilchen (Einzelladung q) mit Zahldichte $n(x)$ und Geschwindigkeit $\vec{v}(x)$. Konstruieren Sie daraus die 4-Stromdichte $j(x)$ und verifizieren Sie explizit ihre Vierervektornatur.

Aufgabe 45

Verifizieren Sie, dass ein Punktteilchen mit Ladung q und beliebiger zeit- oder lichtartiger Weltlinie $z^i(\tau)$ die 4-Stromdichte $j^i(x) = q \int d\tau \dot{z}^i \delta^{(4)}(x - z(\tau))$ hat. Zeigen Sie auch direkt, dass j die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

Aufgabe 46

Verifizieren Sie, dass ein Punktteilchen mit beliebiger zeit- oder lichtartiger Weltlinie $z^i(\tau)$ und 4-Impuls $p(\tau)$ den Energie-Impuls-Tensor $T^{ik}(x) = \int d\tau p^i \dot{z}^k \delta^{(4)}(x - z(\tau))$ hat. Zeigen Sie direkt, dass die Erhaltung von p gleichbedeutend mit $T^{ik}_{,k} = 0$ ist.

Aufgabe 47

Geben Sie eine untere Schranke für die Ausdehnung R eines Körpers mit Masse M und Eigendrehimpuls $L \equiv |\vec{L}|$ in seinem Schwerpunktsystem unter der Voraussetzung $|\vec{\pi}| \leq \epsilon$.

Aufgabe 48

Bestimmen Sie den gemittelten Energie-Impuls-Tensor für ein System von N freien Punktteilchen der Masse m im dreidimensionalen Gebiet $\mathcal{V} \subset \{t = \text{const}\}$ (Volumen V) mit isotroper Geschwindigkeitsverteilung, indem Sie die Teilchen mit einem Index A ($A = 1, \dots, N$) nummerieren, für jedes Teilchen den Energie-Impuls-Tensor aus Aufgabe 46 verwenden, über \mathcal{V} mitteln und schließlich A durch den kontinuierlichen Index \vec{v} sowie $\sum_A \dots$ durch $N \int d^3v f(|\vec{v}|) \dots$ mit $\int d^3v f = 1$ ersetzen. Dieser Energie-Impuls-Tensor beschreibt ein *ideales Gas*. Wie lautet dessen barotrope Zustandsgleichung im nichtrelativistischen und ultrarelativistischen Grenzfall?

Aufgabe 49

Leiten Sie die relativistische Euler-Gleichung für ein ideales Fluid aus $T^{ik}_{,k} = 0$ her.

Aufgabe 50

Ein ideales Fluid sei *stationär* (die Bestimmungsstücke hängen nicht von der Zeit ab) und *wirbelfrei*, d.h. $\epsilon_{ijkl}u^j u^{k,l} = 0$ (warum ist diese Bedingung die natürliche Verallgemeinerung der nichtrelativistischen Rotationsfreiheit?). Folgern Sie unter diesen Voraussetzungen aus der Euler-Gleichung die *relativistische Bernoulli-Gleichung*

$$\ln u_0 + \int^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'} = \text{const.}$$

In welchem Spezialfall liefert sie die klassische Bernoulli-Gleichung?

Aufgabe 51

Zeigen Sie, dass der 1. Hauptsatz der Thermodynamik für ein ideales Fluid im Gleichgewicht auch in der Form

$$d\epsilon = \frac{\epsilon + p}{n} dn + nT ds$$

geschrieben werden kann und folgern Sie daraus $\dot{s} \equiv s_{,i} u^i = 0$.