

- 1 **Zeitdilatation:** Gegeben sei ein inertialer Beobachter X mit Vierergeschwindigkeit u . Ein weiterer inertialer Beobachter X' habe die Vierergeschwindigkeit w . Berechne die Schnittpunkte der Ebenen der Gleichzeitigkeit $t' = \text{const}$ von X' mit der Zeitachse von X . Bezeichne mit t die Zeitkoordinate dieser Schnittpunkte. Zeige dass $t = \gamma^{-1}t'$.

Berechne umgekehrt die Schnittpunkte der Ebenen der Gleichzeitigkeit $t = \text{const}$ von X mit der Zeitachse von X' . Bezeichne mit t' die Zeitkoordinate dieser Schnittpunkte. Zeige dass $t' = \gamma^{-1}t$.

Folgerung: Jeder der beiden Beobachter "sieht" die Zeit des anderen langsamer ablaufen (weil $\gamma^{-1} < 1$).

[English version: Let X be an inertial observer with four-velocity u , and let X' be an inertial observer with four-velocity w . Calculate the intersection of the surface of simultaneity $t' = \text{const}$ of X' with the time-axis of X ; call the corresponding time coordinate t . Show that $t = \gamma^{-1}t'$.

Calculate, next, the intersection of the surface of simultaneity $t = \text{const}$ of X with the time-axis of X' ; call the corresponding time coordinate t' . Show that $t' = \gamma^{-1}t$.

Conclude that every observer "sees" the time of the other as flowing slower than his (since $\gamma^{-1} < 1$).]

- 2 a) Bezüglich eines Beobachters X (mit Koordinaten $\{t, \vec{x}\}$) sei ein Teilchen beschrieben durch die Weltlinie

$$(-1, 1) \ni \lambda \mapsto x^\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda \\ 1 + \lambda^2 \sin \lambda \\ \lambda^2 \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Berechne die Dreiergeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ des Teilchens. Gib die Vierergeschwindigkeit des Teilchens an. (Warum ist $\lambda \in (-1, 1)$ vorausgesetzt und nicht z.B. einfach $\lambda \in \mathbb{R}$?)

b) Ein Teilchen bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius r ; die Kreisfrequenz sei ω . (Da muß man aber aufpassen. Warum?) Gib die Weltlinie des Teilchens an. Parametrisiere dann die Weltlinie nach Eigenzeit. Berechne die Vierergeschwindigkeit und die Viererbeschleunigung.

- 3 Find four linearly independent a) spacelike vectors, b) timelike vectors, and c) null vectors.

- 4 Derive the conditions on the constant vectors \vec{E}_0 , \vec{B}_0 and k^μ so that the fields

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ik_\mu x^\mu} \quad \text{and} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{ik_\mu x^\mu}$$

satisfy the source-free Maxwell equations.

Übungen zur Vorlesung Relativitätstheorie und Kosmologie I: Problem Sheet 5

- 5 Prove the inverse Cauchy-Schwarz inequality when one of the vectors is light-like, and show that equality occurs only when the vectors are proportional.