1 In einem Inertielsystem bewegen sich zwei Teilchen im rechten Winkel zueinander, und mit gleichen Geschwindigkeiten v. Wie gross ist die relative Geschwindigkeit?

2 Betrachte den Minkowski-Raum mit (pseudo)orthonormaler Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Betrachte die Vektoren

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher dieser Vektoren ist zeit/licht/raumartig? Finde einen vierten Vektor, v_3, der (pseudo)orthogonal auf diese drei Vektoren steht. Ist v_3 zeit/licht/raumartig?

3 A clock C is at rest at the spatial origin of an inertial frame S. A second clock C' is at rest at the spatial origin of an inertial frame S' moving with constant speed v relative to S. The clocks read $t = t' = 0$ when the two spatial origins coincide. When C' reads t'_2 it receives a radio signal from C sent out when C reads t_1. Draw a space-time diagram describing this process. Determine the space-time coordinates (ct_2, x_2) in S of the point (event) at which C' receives the radio signal. Hence show that

$$t_1 = t'_2 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\,.$$

Is there a relationship with the Doppler effect?

4 Seien u^μ, v^ν Vektoren im Minkowski–Raum mit $u^\mu\, u_\mu = v^\mu\, v_\mu = -1$ und $u^\mu\, v_\mu < 0$. Hier man schreibt $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$, und $v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$. Sei

$$L^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - 2v^\mu\, u_\nu + (1 - u^\alpha\, v_\alpha)^{-1}\, (u^\mu + v^\mu)\,(u_\nu + v_\nu)\,.$$

Zeige, dass

i.
$$L^\mu{}_\nu\, u^\nu = v^\mu,$$

ii.
$$L^\mu{}_\nu\, L^\lambda{}_\rho\, \eta_{\mu\lambda} = \eta_{\nu\rho}.$$

Hint: calculations are simpler if you introduce $w^\mu := u^\mu + v^\mu$, $\phi := 1 - u^\alpha v_\alpha$, rewrite $L^\mu{}_\nu$ in terms of those, calculate $w^\mu u_\mu$, $w^\mu v_\mu$, deduce $w^\mu w_\mu$, and continue from there.

5 [For self-study, will not be covered in class.] Seien v und w zeitartig und linear unabhängig. Zeige dass die Gerade $\{v + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ den Lichtkegel in zwei Punkten schneidet.

6 [For self-study, will not be covered in class.] Zeige explizit, dass die Bedingung für Lorentztransformationen

$$L^{\mathrm{T}}\eta L = \eta$$

zehn unabhängige Gleichungen darstellt (woraus soll es folgen, dass die Lorentztransformationen eine 6-parametrige Gruppe bilden?).