

- 1 Schreiben wir x für (x^1, x^2, x^3) . Zeige durch explizites Nachrechnen, dass das 1. Newton'sche Gesetz

$$\ddot{x}(t) = 0$$

invariant unter Galilei-Transformationen ist. Erinnerung: Die Galilei-Transformationen lauten

$$t' = t \tag{1a}$$

$$x' = Rx - vt; \tag{1b}$$

v ist der Geschwindigkeitsvektor, R eine Drehmatrix. (In Komponentenschreibweise: $t' = t$, $x^{i'} = R^i_{j'} x^j - v^i t$.) Zeige dass die Galilei-Transformationen bilden eine Gruppe.

- 2 Die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (k > 0) \tag{2}$$

ist die Gleichung des harmonischen Oszillators; sie beschreibt die Bewegung eines Teilchens der Masse m unter Einwirkung einer Federkraft (à la Hooke).

Ist diese Gleichung Galilei-invariant?

Wie kann das sein, wenn nicht? Gleichung (2) ist doch einfach das 2. Newton'sche Gesetz ($ma = F$) und müsste daher Galilei-invariant sein?

- 3 Recall that, in dimension three, a vector field X is a triplet of functions $X = (X^1, X^2, X^3)$. Show that for any vector field X we have

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \text{grad}(\text{div}X) - \Delta X,$$

where grad is the gradient of a function: $\text{grad}f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$; div is the divergence of a vector field $\text{div}X := \partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3$; and $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ is the Laplace operator. Here $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. Finally $\nabla \times X$ is the curl of a vector field X :

$$\nabla \times X := \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3.$$

- 4 [Schwierig] Die Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar \partial_t \psi = -\hbar^2 / (2m) \Delta \psi.$$

Als nichtrelativistische Gleichung müsste die Schrödinger-Gleichung Galilei-invariant sein. Zeige, dass dies tatsächlich der Fall ist, aber nur wenn man voraussetzt, dass $\psi(t, x)$ nicht wie ein Skalar transformiert, sondern gemäß

$$\psi'(t', x') = e^{-imvx/\hbar + imv^2 t / (2\hbar)} \psi(t, x),$$

Übungen zur Vorlesung Relativitätstheorie und Kosmologie I; Problem Sheet 1

wobei wir hier der Einfachheit halber nur eine Raumdimension betrachten. (Also: $t' = t$, $x' = x - vt$, wo x und v eindimensional sind.) Hinweis: Man zeigt dann, dass

$$\left(i\hbar\partial_t + \hbar^2/(2m)\partial_x^2\right)\psi(t, x) = \left(i\hbar\partial_t + \hbar^2/(2m)\partial_x^2\right)\left(e^{miv/\hbar(x-vt/2)}\psi'(t'(t, x), x'(t, x))\right) = 0,$$

wenn $\psi'(t', x')$ die “gestrichene” Schrödinger-Gleichung erfüllt.