

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Ordinary Differential Equations

Unterlagen zur Vorlesung
Mathematische Methoden der Physik I

J. Mark Heinzle
Gravitational Physics, Faculty of Physics
University of Vienna

Version 16/06/2009

Contents

1	Einleitung	5
2	Klassifikation	9
3	Elementary Observations	13
4	Existenz und Eindeutigkeit	21
5	Gleichungen 1. Ordnung	29
5.1	Autonome Gleichungen 1. Ordnung	29
5.2	A modern approach to $\dot{x} = F(x)$	41
5.3	Separable Gleichungen	48
5.4	Lineare Gleichungen	51
5.5	Exact differential equations	57
5.6	Substitutionen	64
6	Gleichungen 2. Ordnung	69
6.1	Erhaltungsgrößen	69
6.2	Conserved quantities, part II	79
6.3	Monotone Größen	85
6.4	The Wronskian	90
6.5	Linear homogeneous equations	94
6.6	Constant coefficients	98
6.7	Inhomogeneous equations	103
7	Linear systems of ODEs	109
7.1	Normal forms of real operators	109
7.2	The matrix exponential	112
7.3	Linear systems of ODEs with constant coefficients	115

1 Einleitung

Betrachten wir ein Partikelchen der Masse m in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$. Durch das Einwirken der Kraft beschreibt das Teilchen eine Bahn im Raum, dargestellt durch die Funktion $t \mapsto \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist gegeben durch die Ableitung von $\vec{x}(t)$ nach der Zeit t , d.h. $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$; die Beschleunigung entspricht der 2. Ableitung: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$.

Laut dem 2. Newtonschen Gesetz gilt $m\vec{a} = \vec{F}$, also

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)). \quad (1.1)$$

Die Funktion $\vec{x}(t)$ erfüllt daher eine **Differentialgleichung** (genaugenommen ein System von Differentialgleichungen).

Differentialgleichungen sind in der Physik allgegenwärtig — die Naturgesetze sind Differentialgleichungen. Die fundamentalen Gleichungen der Physik, die Bewegungsgleichungen der Newtonschen und der relativistischen Mechanik, die Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus, die Schrödingergleichung in der Quantenmechanik, die Einsteingleichungen in der allgemeinen Relativitätstheorie etc. etc. — Differentialgleichungen, Differentialgleichungen, und ... Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine (hinreichend differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Die Gleichung enthält hierbei die unabhängigen Variablen x_1, \dots, x_m , und die Funktionen f_1, \dots, f_n , und deren Ableitungen. (Beispiel: Das elektrische Feld ist eine Funktion $\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} \mapsto \vec{E}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ und erfüllt die Differentialgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi\rho(\vec{x})$.)

Wir spezialisieren uns hier auf Differentialgleichungen von Funktionen in *einer*

(reellen) Variablen, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

d.h. wir beschäftigen uns ausschließlich mit **gewöhnlichen Differentialgleichungen**. (Beispiel: Gleichung (1.1) ist eine Differentialgleichung für die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$.)

Allgemein lässt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung schreiben als

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.4)$$

wo F eine gegebene Funktion ist. Die Variable x ist hier die unabhängige Variable; f' ist die Ableitung der Funktion f nach ihrem Argument, $f^{(i)}$ bezeichnet die i te Ableitung.

Betrachten wir ein paar Beispiele. Die Gleichung

$$f''(x) + f'(x) + e^x (f(x))^2 = 0 \quad (1.5)$$

ist eine Differentialgleichung für die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Üblicherweise wird das Argument der Funktion weggelassen und wir schreiben

$$f'' + f' + e^x f^2 = 0. \quad (1.5')$$

Eine ähnliche Gleichung ist

$$f'' + f' + f^2 = 0; \quad (1.5')$$

sie enthält die unabhängige Variable (hier: x) nicht explizit. Die Gleichung (1.1) besteht eigentlich aus drei Gleichungen,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ F_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ F_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Dies ist ein System von Differentialgleichungen. Wieder tritt die unabhängige Variable (hier: t) nicht explizit auf. Hätten wir statt (1.1) nur die Bewegung eines Teilchen in einer Dimension betrachtet, dann hätten wir kein System von Gleichungen sondern nur eine skalare Gleichung,

$$m\ddot{x} = F(x), \quad (1.7)$$

für die Funktion $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$.

Als Physiker müssen wir in der Notation flexibel sein — Funktionen heißen nicht immer $y(x)$, sondern auch $f(x)$, $x(t)$, ..., oder vielleicht sogar einmal $x(f)$. Entsprechend kann ein und dieselbe Differentialgleichung in mehreren Notationen auftreten:

$$\begin{aligned}y'' + e^x y &= 0 \\f'' + e^x f &= 0 \\\ddot{x} + e^t x &= 0 \\\frac{d^2}{dz^2} h(z) + e^z h(z) &= 0\end{aligned}$$

Und noch eine Bemerkung. Was ist mit Mathematica oder Maple? Können wir nicht einfach Computerprogramme benützen und uns die Theorie der Differentialgleichungen sparen? Computeralgebra ist oft sehr wertvoll; dennoch ist es nötig sich über die Grenzen dieser Programme im Klaren zu sein. Betrachten wir eine einfach aussehende Differentialgleichung wie etwa

$$y'' + y' + y(1 + y) = 0. \tag{1.8}$$

Was sagt Mathematica?

```
In[1]:= DSolve[y''[x] + y'[x] + y[x] (1 + y[x]) == 0, y[x], x]
```

```
Out[1]= DSolve[y[x] (1 + y[x]) + y'[x] + y''[x] == 0, y[x], x]
```

Langer Output, kurzer Sinn: Mathematica weiß nicht was es tun soll. Ganz im Gegensatz zu uns. Natürlich können wir diese Differentialgleichung lösen (zumindest unter bestimmten Gesichtspunkten).

2 Klassifikation

Die Kenntnis der einschlägigen Begriffe ist essenziell. Wie soll man mit Google™ oder bei Wikipedia etwas finden, wenn man nicht weiß welchen Begriffe man eingeben soll. . .

Im Folgenden geben wir viele Beispiele von Differentialgleichungen an ohne uns darum zu kümmern ob diese Gleichungen überhaupt Lösungen besitzen, und —falls ja— welche Eigenschaften diese Lösungen aufweisen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen (ordinary differential equations) sind Differentialgleichungen für Funktionen einer (reellen) Veränderlichen. Gewöhnliche Differentialgleichungen betreffen daher Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

mit $n \geq 1$. (Wir werden jedoch später sehen, dass Lösungen oft nur auf einem endlichen Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind.)

Partielle Differentialgleichungen (partial differential equations) sind formuliert für Funktionen mehrerer (reeller) Variabler, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m \geq 2$. Ein Beispiel ist die Wellengleichung

$$-\frac{\partial^2 f(t, x, y, z)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f(t, x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(t, x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(t, x, y, z)}{\partial z^2} = 0$$

für die Funktion $f(t, x, y, z)$.

Wir beschränken uns hier auf gewöhnliche Differentialgleichungen. (Partielle Differentialgleichungen werden in der Vorlesung M2 behandelt.) Im Folgenden verwenden wir den Begriff “Differentialgleichung” typischerweise für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Skalare Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen für Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Einfache Beispiele sind

$$\begin{aligned} f' &= f^2 e^x, \\ f'' + 2f' + f &= \sin x. \end{aligned}$$

Systeme von Differentialgleichungen hingegen betreffen vektorwertige Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit $n \geq 2$. Die Anzahl der Differentialgleichungen entspricht typischerweise der Zahl der Komponenten der Funktion,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Z.B. ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ein System von Differentialgleichungen für die Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir werden vorerst hauptsächlich skalare Differentialgleichungen betrachten, jedoch später auch auf System zurückkommen.

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist von besonderer Bedeutung. Sie ist identisch mit der Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung. Ein paar Beispiele:

- Die Gleichung $y' = xy$ für die Funktion $y(x)$ ist 1. Ordnung.
- $\ddot{x} + ax = 0$ (mit $a = \text{const}$) für $x(t)$ ist 2. Ordnung.
- $f' f''' + f'' = e^x$ für $f(x)$ ist 3. Ordnung.
- Das System (2.5) ist 1. Ordnung.

Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit *expliziten* Differentialgleichungen; das sind solche wo die höchste Ableitung freigestellt werden kann, also

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.6)$$

Beispiele von *impliziten* Differentialgleichungen sind $e^{y' \sin x} \cos(xy') = x^2$ oder $(y')^2 - y^2 = 0$. (Warum ist letztere nicht explizit?)

Eine Differentialgleichung wird **linear** genannt, wenn die unbekannt Funktion und ihre Ableitungen linear auftreten. (Das betrifft nicht die unabhängige Variable!) Daher lässt sich eine (skalare) lineare Differentialgleichung schreiben als

$$g_n(x)y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + g_1(x)y' + g_0(x)y + \tilde{g}(x) = 0. \quad (2.7)$$

Hierbei sind $\tilde{g}(x), g_0(x), \dots, g_n(x)$ irgendwelche Funktionen. Beispiele:

- $y' = x^2$.
- $x^2 y'' + xy' + y = e^x$.
- $y'' + (\sin x)y = 0$.

Analog treten bei einem System linearer Differentialgleichung die unbekannt Funktionen und ihre Ableitungen linear auf; ein Beispiel ist (2.5).

Noch einfacher sind **lineare** Differentialgleichungen **mit konstanten Koeffizienten**:

$$c_n y^{(n)} + c_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y + \tilde{g}(x) = 0. \quad (2.8)$$

Hier sind $c_i, i = 1, \dots, n$, Konstante; jedoch kann $\tilde{g}(x)$ eine Funktion sein. Beispiel: $y'' + 3y' + 5y = e^x$.

Für lineare Differentialgleichungen (2.7) ist eine Unterscheidung von **homogenen** und **inhomogenen** Gleichungen zweckmäßig. Ist $\tilde{g} \equiv 0$, so ist die Gleichung homogen, ist $\tilde{g} \neq 0$, so ist die Gleichung inhomogen.

Eine Gleichung, die nicht linear ist nennt man **nichtlinear**. (Beinahe ein Tautologie.) (Unter den nichtlinearen Gleichungen bilden die *semilinearen* Gleichungen und die *quasilinearen* Gleichungen Teilfamilien. Diese Begriffe werden aber erst bei partiellen Differentialgleichungen relevant.)

Eine Differentialgleichung heißt **autonom**, wenn keine Abhängigkeit von der unabhängigen Variable auftritt. Beispiel: $y' + y = 0$ ist autonom, weil keine x -Abhängigkeit gegeben ist. Ebenso ist (2.5) ein autonomes System, weil die unabhängigen Variable t nicht explizit aufscheint.

Andere Typen oder Teilklassen, die uns begegnen werden, sind u.a. separable Gleichungen, exakte Differentialgleichungen, ...

3 Elementary Observations

To get a feeling for ODEs (ordinary differential equations) we begin by considering a number of simple examples.

Let us focus on scalar differential equations, i.e., on equations for a scalar (real-valued) function

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) . \end{aligned} \tag{3.1}$$

A very simple differential equation—in fact, one of the simplest one can come up with—is

$$f' = x . \tag{3.2}$$

This equation can be readily integrated to yield

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + c , \tag{3.3}$$

where $c \in \mathbb{R}$ is an arbitrary constant. The solution (3.3) is the general solution of equation (3.2).

The **general solution** (*allgemeine Lösung*) of a differential equation is the set of all its solutions. According to its definition, the general solution of a differential equation is a *set* of solutions. Thus, strictly speaking, instead of (3.3) one should write

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{x^2}{2} + c\} \tag{3.4}$$

for the general solution of (3.2). However, for simplicity, we will avoid these subtleties.

An important lesson to learn from (3.3) is that the general solution is a *one-parameter family* (or two-, three- etc.) of solutions. There exists a free constant c (or free constants c_1, c_2, \dots) in the general solution. **Observation 1**

A **particular solution** (*partikuläre Lösung*) or special solution of a differential equation is just one particular solution. E.g., $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$ is a particular solution of (3.2).

Let us discuss a concept that is of central importance in the study of differential equations: An **initial value problem** (*Anfangswertproblem*) consists of a differential equation and an initial condition (or initial conditions, *Anfangsbedingungen*). An initial condition (for a first order equation) is

$$f(x_0) = f_0, \quad (3.5)$$

i.e., the requirement that the value of the function f is f_0 at some value $x = x_0$ of the independent variable. The assumptions that are necessary to guarantee that an IVP (*AWP*) has a (unique) solution will be discussed in Section 4.

Initial value problems are of fundamental importance in physics. For instance, consider a differential equation $\dot{f} = F(t, f)$ that models the time evolution of a physical system that is described by a function $f(t)$. The initial condition for the quantity, $f = f_0$, corresponds to the state of the system at some initial time $t = t_0$; i.e., $f(t_0) = f_0$. Given the initial state of the physical system, we are able to predict (and retrodict) the evolution of the system, if we solve the initial value problem.

EXAMPLE

An initial value problem associated with (3.2) is, e.g.,

$$f' = x, \quad f(1) = \sqrt{2}. \quad (3.6)$$

(Comparing with (3.5) we see that $x_0 = 1$ and $f_0 = \sqrt{2}$ in this example.) The general solution of the equation is (3.3), i.e.,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c. \quad (3.7)$$

To obtain the solution of the IVP we adapt the constant c ,

$$f(1) \stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{2} + c \stackrel{(3.6)}{=} \sqrt{2}, \quad (3.8)$$

hence $c = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ and the solution of the IVP is

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + \sqrt{2}. \quad (3.9)$$

The differential equation

$$f' = \frac{1}{x} \quad (3.10)$$

possesses the general solution

$$f(x) = \log |x| + c, \quad (3.11)$$

where $c \in \mathbb{R}$ is arbitrary. The solution of the IVP

$$f' = \frac{1}{x}, \quad f(-1) = 1 \quad (3.12)$$

is

$$f(x) = 1 + \log |x|. \quad (3.13)$$

Usually, the **domain** of a solution (i.e., its interval of existence) is assumed to be **maximal**. (If $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ solves a differential equation, then the interval (a, b) is the maximal interval of existence [maximal domain], if there does not exist any other solution $\hat{f} : \mathbb{R} \supseteq (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ with $(\hat{a}, \hat{b}) \supset (a, b)$ and $\hat{f}(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$; in other words, (a, b) is maximal if f cannot be extended beyond this interval.)

EXAMPLE

The function $f : (-2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{2}$ is a solution of (3.2). However, its domain $(-2, 1)$ is not maximal, because the solution can be extended to a solution defined on \mathbb{R} .

For the solution (3.13) of the IVP (3.12), the maximal domain is not \mathbb{R} , but $(-\infty, 0)$. The solution cannot be extended (as a differentiable function) beyond $x = 0$; since $|x| = (-x)$ on $(-\infty, 0)$ we may write

$$f(x) = 1 + \log(-x) \quad (3.14)$$

instead of (3.13).

For the differential equation (3.10) consider the IVP

$$f' = \frac{1}{x}, \quad f(0) = 1. \quad (3.15)$$

Comparing with the general solution (3.11) we see that this IVP does not have a solution.

Although the example is next to being trivial, we learn two important lessons. **Observation 2**

(i) The (maximal) domain of a solution of an IVP need not always be \mathbb{R} ; the domain can also be an interval (which obviously contains x_0 , the initial value of independent variable). (ii) IVPs need not always have a solution. (In the present example it is clear why the IVP (3.15) is ill-posed: The initial value of the independent variable is $x_0 = 0$; but for that value, the r.h.s. of the differential equation is not defined.)

Another lesson to learn is to be cautious when one uses *Mathematica*. Compare our considerations with the following *Mathematica* output:

```
In[5]:= DSolve[f'[x] == 1/x, f[x], x]
Out[5]= {{f[x] -> C[1] + Log[x]}}
```

```
In[6]:= DSolve[{f'[x] == 1/x, f[-1] == 1}, f[x], x]
Out[6]= {{f[x] -> 1 - i pi + Log[x]}}
```

Consider the differential equation of second order

$$f'' = x. \quad (3.16)$$

(Classification: This is a inhomogeneous linear ODE with constant coefficients.) The general solution is obtained by straightforward integrations,

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_0, \quad (3.17)$$

where $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants. We see that the general solution of a second order ODE contains two free constants, i.e., the general solution is a two-parameter family of solutions. A consistent IVP thus has to provide two initial conditions,

$$f(x_0) = f_0, \quad f'(x_0) = f_1. \quad (3.18)$$

EXAMPLE

Constant acceleration in Newtonian physics is described by the ODE

$$\ddot{x} = a. \quad (3.19)$$

Prescribing the initial conditions $\dot{x}(t_0) = 0$ (i.e., the velocity is zero at t_0) and $x(t_0) = x_0$, then the solution of the IVP is

$$x(t) = x_0 + \frac{a}{2} t^2. \quad (3.20)$$

So far we have merely considered differential equations that could be integrated directly. Alas, the world is not so simple. . .

Consider the ODE (which is linear with constant coefficients, homogeneous, autonomous)

$$f' = f . \quad (3.21)$$

We will systematically discuss the methods to find solutions of ODEs of this type in Section 5, but in this case we can simply guess. (Which function remains invariant under differentiation?) Obviously, $f = e^x$ is a solution, but also

$$f = ce^x , \quad (3.22)$$

where c is an arbitrary constant. (Exercise: Prove that this is the general solution.) However, the free constant c enters the general solution not as an additive constant like in (3.3) and (3.11) but as a multiplicative constant.

At the next level of complexity let us consider the (nonlinear, autonomous) ODE

$$f' = f^2 . \quad (3.23)$$

Let us guess (and postpone the systematic analysis to Section 5). We know that $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right)^2$, hence

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad (3.24)$$

is a solution. Trial and error then leads to the general solution

$$f(x) = \frac{1}{c - x} , \quad (3.25)$$

where c arbitrary. (Let us prove that (3.25) is indeed the general solution of (3.23). To this end let f be a solution of (3.23). Our aim is to show that f is necessarily of the form (3.25). Consider the expression $x + \frac{1}{f}$. Differentiation yields $1 - f^{-2}f'$, which is zero by (3.23), i.e.,

$$\frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{f(x)} \right) = 0 . \quad (3.26)$$

It follows that $x + \frac{1}{f} = c$ for some constant c . Hence we find that f must be of the form (3.25), which implies that (3.25) is the general solution, as claimed.) In the general solution (3.25) the free constant enters neither as an additive nor as a multiplicative constant, it enters in a more complicated way (which is another important lesson to learn). It is important to note that the maximal domain

Observation 4

of (3.25) is not \mathbb{R} but either $(-\infty, c)$ or (c, ∞) . Hence, even for ‘unpretentious’ ODEs, like (3.23), the solutions need not be globally defined on \mathbb{R} . In the Section 5 we will discuss how differential equations and associated IVPs of the type (3.23) can be solved. **Observation 5**

Another interesting ODE is

$$f' = \frac{f}{x}. \quad (3.27)$$

Again we are able to guess: The general solution is

$$f(x) = cx. \quad (3.28)$$

(To prove that this is indeed the general solution consider the expression fx^{-1} . The derivation of this expression is zero, hence $fx^{-1} = \text{const}$ and the claim follows.) Consider the IVP

$$f' = \frac{f}{x}, \quad f(0) = 1. \quad (3.29)$$

To find the solution of the IVP we must adapt the free constant in the general solution. According to (3.28) we have $f(0) = 0$. But the initial condition requires $f(0) = 1$. There is an immediate contradiction; consequently, the IVP does not possess a solution.

If we consider the IVP

$$f' = \frac{f}{x}, \quad f(0) = 0, \quad (3.30)$$

the situation is completely different. According to (3.28) $f(0) = 0$ is satisfied by each solution. Therefore, for every choice of c , the solution (3.28) is a solution of the IVP. In other words, the IVP has infinitely many solutions.

Observation 6 This is important lesson to learn: It can occur that an IVP does not have a solution, but it can also occur that an IVP has infinitely many solutions (and that’s too many for most purposes). (It is suggestive to suspect that the reasons for non-existence and non-uniqueness are ‘problems’ with the r.h. side of the differential equation. This will be discussed in detail in the subsequent section.)

Finally let us consider the ODE

$$f'' = f. \quad (3.31)$$

Guessing what the solutions could be leads us to $\sinh x$ and $\cosh x$. Every linear combination of the two is a solution of (3.31),

$$f(x) = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x. \quad (3.32)$$

This is the general solution. (Proof: Let f be a solution of (3.31). Consider the expressions $f'(x) \cosh x - f(x) \sinh x$ and $f(x) \cosh x - f'(x) \sinh x$. Differentiation of these expression yields zero, hence there must exist constants k_1 and k_2 such that $f'(x) \cosh x - f(x) \sinh x = k_1$ and $f(x) \cosh x - f'(x) \sinh x = k_2$. Solving for $f(x)$ reveals that $f(x)$ is of the form (3.32), hence (3.32) is the general solution.) Since (3.31) is an ODE of second order, the general solution contains two free constants.

To conclude let us have a look at the equation

$$f'' = f^2. \tag{3.33}$$

Mathematica provides us with the general solution:

```
In[11]:= DSolve[f''[x] == f[x]^2, f[x], x]
Out[11]= {{f[x] -> 6^{1/3} WeierstrassP[\frac{x + C[1]}{6^{1/3}}, {0, C[2]}]}}
```

We see that although an ODE might look ‘simple’, its solutions might be complicated functions. (Exercise: Find a one-parameter family of ‘simple’ solutions of (3.33). Why is this not the general solution?) *In general, the solutions of an ODE cannot be expressed in closed form.*

4 Existenz und Eindeutigkeit

Wann hat ein AWP eine Lösung und wann ist diese eindeutig? Diese Frage ist von großer Relevanz. Möchte man ein physikalisches Phänomen durch eine Differentialgleichung modellieren und es stellt sich heraus, dass die Differentialgleichung keine Lösungen für AWP's zulässt oder Mehrdeutigkeiten existieren, dann kann man i.A. davon ausgehen, dass man das physikalische Phänomen unzureichend modelliert hat.

Betrachten wir die Gleichung des harmonischen Oszillators,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad (4.1)$$

hierbei ist $\omega = \text{const.}$ Dies ist eine Gleichung 2. Ordnung. Jedoch können wir diese einfach **in ein System 1. Ordnung transformieren**. Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x(t) \\ x_2(t) &:= \dot{x}(t). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Um $\dot{x}_2(t)$ zu erhalten setzen wir in die Differentialgleichung ein: $\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) = -\omega^2 x_1(t)$. Fassen wir beide Differentialgleichungen zu einem System zusammen:

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \quad (4.2a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1(t). \quad (4.2b)$$

Wir haben damit die Differentialgleichung (4.1) zu einem *äquivalenten System 1. Ordnung* umgeschrieben.

Ebenso kann man eine nichtautonome Gleichung zu einem autonomen System umschreiben. (Dies ist in concreto, d.h. beim Lösen der Gleichung, zwar wenig nützlich, aber aus prinzipiellen Gesichtspunkten interessant.) Ein Beispiel: Die Gleichung

$$y' = y + x \quad (4.3)$$

lässt sich durch die Definition

$$y_0(x) := x, \quad y_1(x) := y(x) \quad (4.4)$$

auf das System

$$y'_0 = 1 \tag{4.5a}$$

$$y'_1 = y_0 + y_1 \tag{4.5b}$$

umschreiben; dies ist ein autonomes System.

Die Vorgangsweise lässt sich ganz allgemein beschreiben. (Wir beschränken uns hier auf skalare Differentialgleichungen; jedoch können auch Systeme höherer Ordnung zu (größeren) Systemen 1. Ordnung transformiert werden.) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4.6}$$

und definieren

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Dann erhalten wir das autonome System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ F(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Wir folgern, dass wir uns o.B.d.A. auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung beschränken dürfen. Denn: Wir haben bewiesen, dass jede Differentialgleichung äquivalent zu einem solchen System ist. Dies ist für bestimmte Überlegungen (wie die folgenden Überlegungen zu Existenz und Eindeutigkeit) sehr zweckmäßig, zum Auffinden von (expliziten) Lösungen jedoch nur gelegentlich hilfreich.

Um den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen zu verstehen, benötigen wir den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit.

Betrachten wir der Einfachheit halber zunächst eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die \mathcal{C}^1 (d.h. stetig differenzierbar) sein soll. Für eine \mathcal{C}^1 Funktion f gilt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \text{ existiert } \forall (\hat{x}, \hat{y}). \tag{4.9}$$

(Dies ist nicht offensichtlich. Wir verweisen auf die Übungen.) Sei K ein beliebiges kompaktes Intervall. Dann folgt aus (4.9), dass

$$\sup_{x,y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty. \quad (4.10)$$

Dieses Supremum erhält einen Namen:

$$L := \sup_{x,y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \quad (4.11)$$

heiße **Lipschitz-Konstante**; natürlich hängt L im Allgemeinen von Kompaktum K ab. Wir wollen nun eine Klasse von Funktionen definieren, die allgemeiner ist als die Klasse \mathcal{C}^1 . Dafür fordern wir nicht (4.9), sondern die schwächere Bedingung (4.10):

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nur mehr die erste Bedingung in (4.9) erfüllt, heiße **lokal Lipschitz-stetig**. Daher: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz-stetig, wenn für jedes Kompaktum K gilt:

$$L := \sup_{x,y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty. \quad (4.12)$$

Damit diese wichtige Aussage nicht untergeht, heben wir sie nochmal hervor: Da die Bedingung für lokale Lipschitz-Stetigkeit allgemeiner ist als die Bedingung für stetige Differenzierbarkeit, ist *jede \mathcal{C}^1 -Funktion automatisch lokal Lipschitz-stetig*.

Natürlich gibt es Funktionen, die nicht auf ganz \mathbb{R} , aber zumindest auf einem Teilbereich von \mathbb{R} lokal Lipschitz-stetig sind: Eine Funktion ist lokal Lipschitz-stetig auf $I \subset \mathbb{R}$, wenn (4.12) zumindest für jedes kompakte Intervall $K \subset I$ gilt.

Die Definition der (lokalen) Lipschitz-Stetigkeit, d.h. (4.12), kann offensichtlich auf Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden. Hierbei ist K eine kompakte Menge in \mathbb{R}^m und $|\cdot|$ bezeichnet den euklidischen Abstand.

BEISPIEL

Die stetige Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar im Punkt $x = 0$ und daher erst recht nicht \mathcal{C}^1 . Jedoch ist die Funktion lokal Lipschitz-stetig. Denn

$$-2|x||y| \leq -2xy \Rightarrow (|x| - |y|)^2 \leq (x - y)^2 \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

woraus wir schließen, dass

$$L = \sup_{x,y} \frac{||x| - |y||}{|x - y|} \leq 1. \quad (4.13)$$

BEISPIEL

Die stetige Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist nicht differenzierbar im Punkt $x = 0$ und daher erst recht nicht \mathcal{C}^1 . Diese Funktion ist sogar ‘zu schlimm’ um Lipschitz-stetig zu sein. Denn: Betrachte in (4.12) $x = 0$, dann

$$\sup_y \frac{\sqrt{|y|}}{|y|} = \sup_y \frac{1}{\sqrt{|y|}} = \infty. \quad (4.14)$$

Es kann daher keine endliche Lipschitz-Konstante existieren. Obwohl die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ nicht lokal Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} ist, so ist sie zumindest auf $(0, \infty)$ [oder auch auf $(-\infty, 0)$] lokal Lipschitz-stetig. Dies folgt einfach aus der Tatsache, dass $f(x)$ auf diesem Intervall eine \mathcal{C}^1 -Funktion ist.

Das Resultat ist analog für Funktionen $f(x) = |x|^a$ mit beliebigem $a < 1$. Der Graph solcher Funktionen besitzt eine ‘zulaufende Spitze’ (*cusp*) bei $x = 0$; der Graph von $f(x) = |x|$ hingegen weist keinen ‘cusp’ auf. Wir sehen: Das Vorhandensein eines ‘cusps’ verhindert die Lipschitz-Stetigkeit (in der Umgebung dieser Stelle).

BEISPIEL

Lipschitz-Stetigkeit ist tatsächlich ein recht kompliziertes Konzept, wie das folgende Beispiel illustriert. (*Gefahr der Verwirrung! Es wird geraten, dieses Beispiel bei der ersten Lektüre zu ignorieren.*) Die Funktion $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ist überall differenzierbar: Für $x \neq 0$ gilt $f'(x) = 2x \sin x^{-2} - 2x^{-1} \cos x^{-2}$; bei $x = 0$ gilt $f'(0) = 0$. (Letzteres zu zeigen ist eine leichte Übungsaufgabe: Man greift einfach auf die Definition der Differenzierbarkeit zurück, siehe Analysis.) Trotzdem ist die Funktion *nicht* Lipschitz-stetig. Um dies zu zeigen, fixiere ein Kompaktum K , so dass $\{0\} \in K$, und betrachte, für zunächst fixes (und hinreichend kleines) $x \in K$, $x \neq 0$, den Ausdruck

$$\sup_{y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \geq \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(x)| \simeq \left| \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right|.$$

Daher folgt

$$\sup_{x \in K} \left(\sup_{y \in K} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \right) \geq \sup_{x \in K} \left| \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right| = \infty,$$

d.h. die Funktion ist nicht lokal Lipschitz-stetig. Wir sehen: Es gibt Funktionen, die überall differenzierbar, aber trotzdem nicht lokal Lipschitz-stetig sind. (Erinnere: Erst stetige Differenzierbarkeit garantiert zweifelsfrei die lokale Lipschitz-Stetigkeit.)

Übungsaufgabe für Mutige: Zeige dass die Funktion $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ lokal Lipschitz-stetig ist. (Diese Funktion ist zwar nicht C^1 , aber ihre Ableitung ist lokal beschränkt, was tatsächlich ausreicht um lokale Lipschitz-Stetigkeit zu garantieren.)

Für eine Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto F(t, x) \end{aligned} \tag{4.15}$$

kann man fragen, ob diese im Argument x lokal Lipschitz-stetig ist. Wir machen folgende Definition: $F(t, x)$ ist lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument, wenn die Funktion $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto F(t, x)$ für jeden (beliebig aber fest gewählten) Wert von t lokal Lipschitz-stetig ist. Natürlich hängt jetzt die Lipschitz-Konstante (nicht nur von K sondern auch) von t ab: L_t . Gilt $L_t \leq \Lambda$ für alle t aus einem beliebigen Kompaktum, dann heißt F gleichmäßig lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.

Mit dieser Definition können wir endlich den folgenden wichtigen Satz verstehen, der die *Existenz- und Eindeutigkeitsfragen* von AWP's regelt. Eine Vorbemerkung: Dieser Satz ist für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung formuliert; aufgrund der besprochenen Äquivalenz zwischen Systemen 1. Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung gilt der Satz auch automatisch für letztere.

Theorem 1 (Picard-Lindelöf). *Betrachte das Anfangswertproblem für die (vektorwertige) Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.16)$$

Die Funktion F sei zumindest definiert auf einer offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (und (t_0, x_0) sei in Ω). Die Funktion F sei auf Ω

- *stetig und*
- *gleichmäßig lokal Lipschitz-stetig im 2. Argument.*

Dann hat das AWP (4.16) eine eindeutige (lokale) Lösung.

Ein paar Bemerkungen sind angebracht: Erstens. Das Theorem garantiert eine ‘lokale’ Lösung, d.h. der maximale Definitionsbereich der Lösung $x(t)$ muss *nicht* mit \mathbb{R} übereinstimmen. (Ist $\Omega \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, würde man dies sogar in vielen Fällen erwarten.) (Eine Lösung, die für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, heißt ‘global’. Für Kriterien unter denen die eindeutige Lösung des AWP nicht nur lokal, sondern global ist, verweisen wir auf die Literatur.)

Zweitens. Eine Möglichkeit das Theorem zu beweisen basiert auf der Picard-Iteration. Das diese für praktische Zwecke wenig bedeutend ist, werden wir hier nicht näher darauf eingehen.

Drittens. Aus unseren Überlegungen zur Lipschitz-Stetigkeit folgt, dass jede \mathcal{C}^1 -Funktion lokal Lipschitz-stetig ist: $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathbf{Lipschitz}$. Für die allermeisten Zwecke reicht daher die etwas weniger allgemeine Form des Satzes 1 vollkommen aus: *Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen Lösung des AWP (4.16) folgen unter der Annahme, dass F eine \mathcal{C}^1 -Funktion ist.*

BEISPIEL

Die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto F(t, x) = tx^2$ ist überall \mathcal{C}^1 ; die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt (mit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Jedes AWP muss daher eine eindeutige lokale Lösung besitzen. (Obwohl die Funktion F auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ‘brav’ ist, kann man nicht erwarten, dass die Lösung global ist. Tatsächlich hat in diesem Beispiel die Lösung des AWP gegeben durch $\dot{x} = F(t, x)$ und $x(0) = 1$ einen maximalen Definitionsbereich $(-2, 2)$ und nicht \mathbb{R} . Dies zu zeigen ist eine leichte Übungsaufgabe, sobald wir die Methoden von Abschnitt 5.3 besprochen haben.)

BEISPIEL

Die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto F(t, x) = (1 + t^2)\sqrt{|x|}$ ist zwar ‘brav’ in t aber nicht \mathcal{C}^1 (und auch nicht lokal Lipschitz-stetig) bei $x = 0$. Die Voraussetzungen des Satzes sind daher nicht auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erfüllt; auf $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ oder $\Omega = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ hingegen erfüllt die Funktion F alle Voraussetzungen, weil F dort \mathcal{C}^1 ist. (Ist die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ so, dass $x_0 = 0$, d.h. $x_0 \notin \Omega$, so treten tatsächlich Mehrdeutigkeiten auf; ist die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ so, dass $x_0 > 0$ (oder $x_0 < 0$), so ist $(t_0, x_0) \in \Omega$ und der Satz von Picard-Lindelöf garantiert eine eindeutige Lösung des AWP.)

BEISPIEL

Die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, x) \mapsto F(t, x) = \sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 - x^2}$ ist \mathcal{C}^1 in $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ und erfüllt damit die Voraussetzungen des Satzes auf dieser Menge. AWP’s mit Anfangsdaten, die in Ω liegen, besitzen eine eindeutige lokale Lösung.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem weiteren fundamentalen Satz, der die Frage beantwortet, wie stark sich Lösungen verändern können, wenn die Anfangsdaten verändert werden.

BEISPIEL

Betrachte das AWP

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 0.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $x(t) \equiv 0$. Verändern wir den Anfangswert um ein $\epsilon \ll 1$, d.h. wir betrachten das AWP

$$\dot{y} = y, \quad y(0) = \epsilon.$$

Die (eindeutige) Lösung ist $y(t) = \epsilon e^t$; siehe Kapitel 3. Wenn ϵ sehr klein ist, bleibt die Funktion $y(t)$ für lange Zeit klein (und damit ist $|x(t) - y(t)|$ klein). Mit wachsenden Zeiten divergieren die beiden Lösungen aber zusehends. Zumindest lässt sich feststellen, dass die Distanz zwischen den Lösungen der AWP’s maximal exponentiell divergiert.

Der folgende Satz zeigt: Das Beispiel ist schon das ‘worst case scenario’. Zwei Lösungen (deren Anfangsdaten sehr nahe beieinander liegen) können voneinander divergieren; die Divergenz ist aber höchstens exponentiell (und nicht etwa noch schlimmer); dies gilt zumindest auf einem Gebiet, auf welchem die ‘rechte Seite’ der Differentialgleichung *global* Lipschitz-stetig ist. (Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt global Lipschitz-stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn

$$L := \sup_{x,y \in I} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty. \quad (4.17)$$

Dies entspricht genau (4.12), wo die Kompakta $K \subset I$ durch I selbst ersetzt worden sind. Diese Definition gilt analog für Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.)

Theorem 2 (Abhängigkeit von den Anfangsdaten). *Seien $x(t)$ und $y(t)$ Lösungen der AWP*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) & \dot{y}(t) &= F(t, y(t)) \\ x(t_0) &= x_0, & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Funktion F erfülle die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf und sei auf Ω (global) Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L . Dann gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|} \quad (4.19)$$

für alle t sodass $x(t), y(t) \in \Omega$. Insbesondere sehen wir, dass die Lösung eines AWP stetig von den Anfangsdaten abhängt.

5 Skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Jetzt wissen wir wann Differentialgleichungen Lösungen besitzen und wann diese eindeutig sind. Im nächsten Schritt diskutieren wir Methoden um diese Lösungen tatsächlich zu bestimmen. Das Auffinden von Lösungen wird in einigen Fällen (für bestimmte Typen von Differentialgleichungen) mehr und weniger explizit möglich sein, in anderen Fällen können wir zumindest qualitative oder asymptotische Aussagen über die Lösungen treffen. Die wichtigsten Hilfsmittel: Mathematica und der eigene Verstand.

Im diesem Kapitel betrachten wir skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung,

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) ,$$

für Funktionen $t \mapsto x(t)$.

5.1 Autonome Gleichungen 1. Ordnung

Schon “einfache” Differentialgleichungen können sehr komplexe Lösungen produzieren. Wir beginnen mit autonomen Differentialgleichungen 1. Ordnung für skalare Funktionen $t \mapsto x(t)$,

$$\dot{x} = F(x) , \tag{5.1a}$$

wo F eine Funktion auf den reellen Zahlen ist. Die Beispiele aus Kapitel 3, die von diesem Typ sind: Gleichung (3.21) (die wir jetzt schreiben würden als $\dot{x} = x$ — somit ist $F(x) = x$) und Gleichung (3.23) (die wir jetzt schreiben würden als $\dot{x} = x^2$ — somit ist $F(x) = x^2$).

Um ein Anfangswertproblem zu formulieren wird eine Anfangsbedingung benötigt. Für $t = t_0$ soll $x(t_0) = x_0$ sein, d.h.

$$x(t_0) = x_0 . \tag{5.1b}$$

Um zu garantieren dass eine eindeutige Lösung des AWP (5.1) existiert, muss F die Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf erfüllen. Gemäß dieses Satzes ist es sicher hinreichend wenn F in einer Umgebung Ω des Punktes (t_0, x_0) , wo die Anfangsbedingung gestellt wird, \mathcal{C}^1 ist (aber Lipschitz tut's ja auch).

Wir wollen (5.1a) umformen um integrieren zu können. Dafür müssen wir in einem 1. Schritt durch $F(x)$ dividieren. Natürlich geht dies nur unter der **Annahme** $F(x) \neq 0$. Dann folgt

$$\dot{x} = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{x}}{F(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{\dot{x}}{F(x)} dt = \int dt + c,$$

wo c eine beliebige Konstante ist. Das Integral kann ausgeführt werden, da

$$\int \frac{\dot{x}}{F(x)} dt = \int \frac{1}{F(x)} \underbrace{\frac{dx}{dt} dt}_{dx} = \int \frac{1}{F(x)} dx =: \hat{\mathcal{F}}(x).$$

Mit Hilfe einer einfachen Regel lässt sich dies viel einfacher merken:

$$\dot{x} = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{F(x)} = dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{F(x)} = \int dt + c \quad (5.2)$$

Das Integral auf der linken Seite ist irgendeine Funktion, die wir $\hat{\mathcal{F}}$ nennen wollen. Damit ergibt sich

$$\underbrace{\int \frac{dx}{F(x)}}_{\hat{\mathcal{F}}(x)} = \int dt + c \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{F}}(x) = t + c.$$

Die Umkehrfunktion $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ von $\hat{\mathcal{F}}$ existiert zumindest lokal (weil $F(x) \neq 0$ angenommen wurde) und wir erhalten daher

$$x(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(t + c). \quad (5.3)$$

Alle Lösungen der Differentialgleichung (5.1a), welche die obige Voraussetzung $F(x) \neq 0$ erfüllen, sind von dieser Gestalt.

Die konstanten Funktionen, $x(t) \equiv \text{const}$, die $F(x(t)) = 0$ erfüllen, tauchen (lt. Voraussetzung) bei (5.3) nicht auf. Jedoch sind diese Funktionen auch Lösungen von (5.1a), nämlich die sogenannten **Gleichgewichtslösungen** (Fixpunktlösungen, stationäre Lösungen).

BEISPIEL

Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x$$

hat die Nullfunktion $x(t) \equiv 0$ als (einzige) Gleichgewichtslösung.

BEISPIEL

Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = 1 - x^2$$

hat zwei Gleichgewichtslösungen: $x(t) \equiv 1$ und $x(t) \equiv -1$.

Wir formulieren unsere Überlegungen in einem Satz:

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.1a) besteht aus den Gleichgewichtslösungen und den Lösungen die durch (5.2) ermittelt werden können. (Die letzteren sind dann von der Gestalt (5.3).)

Man ist vielleicht versucht zu sagen: "Die allgemeine Lösung besteht aus (5.3) und dann gibt's da noch die Gleichgewichtslösungen." Es ist vielmehr umgekehrt: "Die allgemeine Lösung besteht aus den Gleichgewichtslösungen und dann gibt's da noch die Lösungen der Gestalt (5.3)." Die Gleichgewichtslösungen sind von vorrangiger Bedeutung — dies wird spätestens im nächsten Abschnitt offensichtlich.

Eine wichtige Bemerkung: Es soll hier nicht der Eindruck entstehen, dass wir jetzt tatsächlich die allgemeine Lösung von (5.1a) explizit bestimmen können. Dazu gibt es viel zu viele Hindernisse: Das fängt schon damit an, dass sich die Gleichgewichtslösungen $F(x) = 0$ i.A. nicht explizit ermitteln lassen. (Eines von unendlich vielen Beispielen: $F(x) = e^x \sin x$.) Zweitens ist es natürlich so, dass sich das Integral in (5.2) i.A. nicht ausführen lässt. Und drittens: Selbst wenn das Integral explizit gelöst werden kann, dann scheitert es i.A. an der benötigten Umkehrung. Erst im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie wir mit Gleichungen des Typs (5.1a) umgehen können, auch wenn die hier besprochenen 'expliziten Techniken' versagen.

BEISPIEL

Gegeben sei die Gleichung

$$\dot{x} = x .$$

Die einzige Gleichgewichtslösung ist $x(t) \equiv 0$. Um die restlichen Lösungen mit Hilfe der Methode (5.2) zu erhalten, treffen wir die Annahme $x \neq 0$, was uns erlaubt durch x zu dividieren.

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dt .$$

Integration liefert

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt + c \quad \Rightarrow \quad \log x = t + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist daher $\hat{\mathcal{F}}(x) = \log x$; diese Funktion lässt sich umkehren—die Umkehrfunktion ist die Exponentialfunktion. Durch ‘Exponenzieren’ erhalten wir daher

$$x = e^{c+t} = \tilde{c} e^t , \tag{5.4}$$

wo \tilde{c} eine Konstante ist. Die allgemeine Lösung besteht aus diesen Funktionen ($\tilde{c} \neq 0$) zusammen mit der Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$. (Man kann auch in (5.4) $\tilde{c} = 0$ zulassen, dann kann man (5.4) als die allgemeine Lösung bezeichnen. Das ist aber eine Besonderheit dieses Beispiels und funktioniert i.A. nicht; i.A. können die Gleichgewichtslösungen nur separat aufgeschrieben.)

BEISPIEL

Obiges Beispiel (d.i. $\dot{x} = x$) nochmal in mathematischer Präzision. Die Integration liefert eigentlich

$$\int \frac{dx}{x} = c + \int dt \quad \Rightarrow \quad \log|x| = c + t.$$

Daher erhalten wir

$$|x| = e^{c+t} = \tilde{c} e^t,$$

wo \tilde{c} eine beliebige *positive* Konstante ist. Folglich

$$x(t) = \pm \tilde{c} e^t = \check{c} e^t,$$

wo $\check{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig ist. Wir haben so alle Lösungen $x(t) \neq 0$ gefunden.

BEISPIEL

Die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2 e^x$$

besitzt die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$. Um die restlichen Lösungen zu ermitteln, gehen wir gemäß (5.2) vor. Wir erhalten

$$\int \frac{dx}{x^2 e^x} = t + c.$$

Was jetzt? **Mathematica** kann die linke Seite zwar integrieren aber findet keine Umkehrfunktion. Wir erhalten keine Lösung in geschlossener Form.

```
In[4]:= DSolve[x'[t] == x[t]^2 Exp[x[t]], x[t], t]
InverseFunction::ifun :
Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>
InverseFunction::ifun :
Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>
Solve::tdep : The equations appear to involve the
variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. >>
Out[4]:= {{x[t] -> InverseFunction[-ExpIntegralEi[-#1] -  $\frac{e^{-#1}}{\#1}$ ] &][t + C[1]]}}
```

Nachdem wir nun wissen wie die allgemeine Lösung der Gleichung (5.1a) ermittelt wird (falls die Methode explizit funktioniert), wenden wir uns dem AWP (5.1) zu.

Um von der allgemeinen Lösung zur Lösung des AWP zu gelangen, verwenden

wir die Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0 .$$

Was kann passieren?

Angenommen es gilt $F(x_0) = 0$. Dann ist die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv x_0$ eine Lösung des AWP. (Wenn die Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt sind, ist dies die einzige Lösung des AWP.)

Angenommen es gilt $F(x_0) \neq 0$. Es folgt, dass die Lösung des AWP keine Gleichgewichtslösung sein kann und daher von der Gestalt (5.3) sein muss, d.h.

$$x(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(t + c) . \quad (5.5)$$

Um zur Lösung des AWP zu gelangen, setzen wir die Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

ein. Somit ist

$$x_0 = x(t_0) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(t_0 + c) ,$$

und wir folgern dass

$$\hat{\mathcal{F}}(x_0) = t_0 + c$$

gilt. Damit können wir die freie Konstante c bestimmen:

$$c = \hat{\mathcal{F}}(x_0) - t_0 .$$

Schließlich liefert das Einsetzen in (5.5) die Lösung des AWP:

$$x(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(t - t_0 + \hat{\mathcal{F}}(x_0)) . \quad (5.6)$$

Man könnte sich diese Formel natürlich merken. Sinnvoller ist es aber sich die Prozedur einzuprägen (siehe Beispiele).

Interessiert man sich nicht für die allgemeine Lösung der Gleichung (5.1a), sondern möchte direkt zur Lösung des AWP (5.1) gelangen, bietet sich eine ‘Abkürzung’ an (aber: Achtung auf Gleichgewichtslösungen). Wir verwenden die Anfangsbedingung bei der Integration:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F(x)} dx = dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{1}{F(x)} dx = \int_{t_0}^t dt .$$

Da wir die Anfangswerte schon berücksichtigen, fällt die Freiheit einer zusätzlichen Konstanten weg. Durch Ausführen der Integration—und der Definition $\hat{\mathcal{F}}(x) := \int \frac{1}{F(x)} dx$ —erhalten wir

$$\hat{\mathcal{F}}(x) \Big|_{x_0}^x = \mathfrak{t} \Big|_{t_0}^t \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{F}}(x) - \hat{\mathcal{F}}(x_0) = t - t_0 .$$

Die Umkehrtransformation liefert dann

$$x(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(t - t_0 + \hat{\mathcal{F}}(x_0)) ,$$

d.i. die Lösung des AWP, siehe (5.6).

BEISPIEL

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^2, \quad x(1) = \frac{1}{3}. \quad (5.7)$$

Die einzige Gleichgewichtslösung ist $x(t) \equiv 0$. Für die anderen Lösungen dürfen wir durchdividieren und standardgemäß vorgehen:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = t + c \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c.$$

Die Umkehrung ist einfach:

$$x(t) = -\frac{1}{t+c} = \frac{1}{\tilde{c}-t}, \quad (5.8)$$

wo $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Zusammen mit der Gleichgewichtslösung ist dies die allgemeine Lösung.

Eine Warnung: **Mathematica** unterschlägt typischerweise die Gleichgewichtslösungen, sogar in diesem einfachen Beispiel:

```
In[20]:= DSolve[x'[t] == x[t]^2, x[t], t]
```

```
Out[20]:= {{x[t] -> \frac{1}{-t - c[1]}}}
```

Um zur Lösung des AWP zu gelangen prüfen wir zunächst, ob der Anfangswert $x_0 = \frac{1}{3}$ mit der Gleichgewichtslösung zusammenfällt. Da dies nicht der Fall ist, setzen wir die Anfangsbedingung in (5.8) ein:

$$x(1) = \frac{1}{\tilde{c}-1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}.$$

Es folgt dass

$$\tilde{c} = 4$$

sein muss. Daher ist die Lösung des AWP

$$x(t) = \frac{1}{4-t}.$$

Beachte dass der maximale Definitionsbereich der Lösung des AWP nicht \mathbb{R} ist sondern nur $(-\infty, 4)$. (Warum nicht $(4, \infty)$?) Die Lösung divergiert bei $t \rightarrow 4$ und lässt sich nicht weiter fortsetzen.

BEISPIEL

Wir betrachten wieder das AWP (5.7) und lösen es dieses Mal ‘direkter’ unter Umgehung der allgemeinen Lösung. Wir erhalten

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\frac{1}{3}}^x \frac{dx}{x^2} = \int_1^t dt,$$

wobei wir im letzten Schritt die Anfangswerte als Integrationsgrenzen verwendet haben—diese waren $t_0 = 1$ und $x_0 = x(t_0) = \frac{1}{3}$. Die Integration liefert

$$-\frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{3}}^x = t \Big|_1^t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} + 3 = t - 1,$$

und damit

$$\frac{1}{x} = 4 - t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4 - t},$$

also—natürlich—dasselbe wie oben.

BEISPIEL

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x^2, \quad x(1) = 0.$$

Was passiert eigentlich, wenn wir nachlässig sind und vergessen, dass wir zunächst überprüfen müssen, ob die Lösung des AWP mit einer Gleichgewichtslösung zusammenfällt (wie es hier der Fall ist)? Wie im Beispiel (5.7) gelangen wir zu

$$x(t) = \frac{1}{\tilde{c} - t} \quad (\tilde{c} \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$x(1) = \frac{1}{\tilde{c} - 1} \stackrel{!}{=} 0$$

und daher den Widerspruch

$$1 = 0.$$

Und wenn man versuchen würde unter Umgehung der allgemeinen Lösung vorzugehen? Dann erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \frac{dx}{x^2} = \int_1^t dt,$$

und somit neuerlich einen Widerspruch:

$$-\frac{1}{x} \Big|_0^x = t \Big|_1^t \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} + \infty = t - 1.$$

Daher: Gleichgewichtslösungen beachten!

BEISPIEL

DER FREIE FALL IN LUFT: Ein Körper mit Masse m bewege sich im (konstanten) Gravitationsfeld der Erde (Erdbeschleunigung g) unter Berücksichtigung des Luftwiderstands. Die Koordinate ('Höhe') sei durch die Variable z bezeichnet; die Beschleunigung ist also \ddot{z} . Die auf den Körper wirkende Schwerkraft ist $-mg$. Um den Luftwiderstand zu modellieren nehmen wir eine Kraft an, deren Betrag quadratisch zur Geschwindigkeit ist und die antiparallel zur Geschwindigkeit ist; also: $-k\dot{z}|\dot{z}|$, wo $k > 0$ eine Konstante ist. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z}|\dot{z}|. \quad (5.9)$$

Sei $v = \dot{z}$ (Geschwindigkeit). Für v erhalten wir eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung,

$$m\dot{v} = -mg - kv|v|, \quad (5.10)$$

die wir lösen wollen. Im ersten Schritt betrachten wir die Gleichgewichtslösungen: Die rechte Seite ist null genau dann wenn

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{k}}. \quad (5.11)$$

Dies ist daher die einzige Gleichgewichtslösung — sie beschreibt hier eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Um die anderen Lösungen zu ermitteln dürfen wir jetzt annehmen, dass $-mg - kv|v| \neq 0$ gilt und durchdividieren:

$$m \frac{dv}{mg + kv|v|} = -dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{dv}{1 + \kappa^2 v|v|} = -dt, \quad (5.12)$$

wobei wir die Abkürzung $\kappa = \sqrt{\frac{k}{mg}}$ eingeführt haben. Wir legen uns auf ein AWP fest, wo die Anfangsbedingung durch

$$v(0) = 0 \quad (5.13)$$

gegeben sei, d.h. zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist die Geschwindigkeit gleich null. Wir stellen fest, dass der Anfangswert nichts mit der Gleichgewichtslösung zu tun hat; daher müssen wir (5.12) integrieren.

Fortsetzung folgt...

BEISPIEL

... und hier die Fortsetzung. Integration von (5.12) unter Verwendung der Anfangswerte führt zu

$$\int_0^v \frac{dv}{1 + \kappa^2 v |v|} = -g \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{1 + \kappa^2 v |v|} = -gt. \quad (5.14)$$

Jetzt heißt's integrieren, wobei wir auf den Betrag aufpassen müssen. Eine Fallunterscheidung $v \leq 0$ ist nötig. An (5.14) sehen wir: $v \leq 0$ entspricht $t \geq 0$.

Fall $v \geq 0$ ($t \leq 0$). Dann gilt

$$\int_0^v \frac{dv}{1 + \kappa^2 v |v|} = \int_0^v \frac{dv}{1 + \kappa^2 v^2} = \kappa^{-1} \arctan(\kappa v) \Big|_0^v = \frac{1}{\kappa} \arctan(\kappa v)$$

und damit $\arctan(\kappa v) = -\kappa g t$ in diesem Fall.

Fall $v \leq 0$ ($t \geq 0$). Dann gilt

$$\int_0^v \frac{dv}{1 + \kappa^2 v |v|} = - \int_v^0 \frac{dv}{1 - \kappa^2 v^2} = -\frac{1}{\kappa} \operatorname{artanh}(\kappa v) \Big|_v^0 = \frac{1}{\kappa} \operatorname{artanh}(\kappa v)$$

und damit $\operatorname{artanh}(\kappa v) = -\kappa g t$ in diesem Fall.

Wenn wir beide Fälle zusammenfassen und die Umkehrtransformation bilden, so erhalten wir die Lösung des AWP:

$$v(t) = \begin{cases} -\kappa^{-1} \tan(\kappa g t) & t \leq 0 \\ -\kappa^{-1} \tanh(\kappa g t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Diskutieren wir die wichtigsten Eigenschaften der Lösung: Das maximale Existenzintervall ist nicht \mathbb{R} sondern $(-a, \infty)$ für eine positive Zahl a (die man leicht bestimmen kann). Für $t \rightarrow -a$ gilt $v(t) \rightarrow \infty$. Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$v(t) \rightarrow -\kappa^{-1} = -\sqrt{\frac{mg}{k}},$$

also nähert sich $v(t)$ für späte Zeiten der Gleichgewichtslösung an.

Die Lösung der ursprünglichen Gleichung (5.9) ergibt sich durch einfache Integration:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

BEISPIEL

Wir betrachten das AWP

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0. \quad (5.16)$$

Offensichtlich ist die Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$ eine Lösung des AWP. Interessanterweise finden wir aber auch andere Lösungen des AWP. (Das sollte ja eigentlich nicht passieren. Aber hier sind die Bedingungen des Satzes von Picard-Lindelöf verletzt: $\sqrt{|x|}$ ist nicht Lipschitz-stetig und AWP's können daher mehrere Lösungen besitzen.) Wir gehen vor wie üblich:

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{|x|} \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = dt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \int_0^t dt = t. \quad (5.17)$$

Man kann das Integral natürlich durch Fallunterscheidung lösen. Wir machen das eleganter, indem wir benützen dass $|x| = x \operatorname{sgn} x$ (wo $\operatorname{sgn} x$ die Signumfunktion ist). Somit erhalten wir

$$\int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x \operatorname{sgn} x}} = \frac{1}{2} 2\sqrt{x \operatorname{sgn} x} \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \sqrt{|x|} \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \sqrt{|x|} \operatorname{sgn} x.$$

(Die Signumfunktion $\operatorname{sgn} x$ kann in diesem Zusammenhang, d.i. auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, wie eine Konstante behandelt werden.) Aus (5.17) ergibt sich daher

$$\sqrt{|x|} \operatorname{sgn} x = t \Rightarrow x(t) = t^2 \operatorname{sgn} t,$$

und dies ist tatsächlich eine zweite Lösung des AWP.

Wir haben also zwei Lösungen des AWP gefunden.

$$x(t) \equiv 0 \quad \text{und} \quad x(t) = t^2 \operatorname{sgn} t.$$

Wie kann das sein? Die rechte Seite der Differentialgleichung (5.16) erfüllt nicht die Bedingungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes; die Wurzel ist in $x = 0$ (also genau dort wo wir unsere Anfangsbedingung stellen) keine Lipschitz-stetige Funktion.

Anmerkung: Tatsächlich hat das AWP (5.16) nicht nur zwei Lösungen, sondern unendlich viele. (Die fehlenden Lösungen zu finden ist eine Herausforderung an der die große Mehrheit der Physik-Absolventen scheitern würde. Wer traut sich?)

Übrigens: Mathematica scheitert bei (5.16) völlig. Aber auch für die (vorgeblich) einfachere Gleichung $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ zeigt uns Mathematica nur eine (der unendlich vielen) Lösung(en) des AWP:

```
In[26]:= DSolve[{x'[t] == 2 Sqrt[x[t]], x[0] == 0}, x[t], t]
```

```
Out[26]= {{x[t] -> t^2}}
```


5.2 A modern approach to $\dot{x} = F(x)$

In general, the methods discussed in the previous section fail and we are unable to obtain solutions in closed form (and Mathematica cannot help either). So, let's use our imagination...

Consider the equation

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (5.18)$$

and assume that F satisfies the conditions of the Picard-Lindelöf theorem.

We may interpret (5.18) as follows: A particle moves on a straight line (whose coordinate is denoted by x) in such a way that the velocity $v = \dot{x}$ of the particle is determined by the particle's position on the line (since $v = F(x)$). We ask the question of what we can say about the actual motion of the particle, i.e., about the solution $x(t)$.

Let us call the points \bar{x}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, on the straight line, for which

$$F(\bar{x}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.19)$$

the **fixed points (equilibrium points)** of F . The velocity of the particle at a fixed point is zero, which suggests that the particle will remain at that position for all times — indeed, this is exactly an equilibrium solution. In other words: Each fixed point \bar{x}_i corresponds to an equilibrium solution (namely the solution $x(t) \equiv \bar{x}_i$), which represents a particle that sits at \bar{x}_i for all times.

In each of the open intervals $(-\infty, \bar{x}_1)$, $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, $i = 1, \dots, (n-1)$, and (\bar{x}_n, ∞) , the function F must have a sign. Assume (w.l.o.g.) that $F > 0$ in $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ and suppose that the particle is located at a point x_0 in this interval at some time t_0 , i.e., $x(t_0) = x_0$. Since $F > 0$, the velocity of the particle is positive; hence the particle must move to the right, towards \bar{x}_{i+1} . Accordingly, as time increases, $x(t)$ will increase and, eventually, $x(t)$ will converge to \bar{x}_{i+1} as $t \rightarrow \infty$; likewise, $x(t) \rightarrow \bar{x}_i$ for $t \rightarrow -\infty$. **Solutions cannot reach fixed points in finite time and cannot pass through fixed points!**

Although this is intuitively clear, let us give a formal *proof* (which is a proof by contradiction): Suppose that there exists a solution $x(t)$ that passes through the fixed point \bar{x}_{i+1} , i.e., $x(t)$ is such that $x(t_0) = x_0 \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ and $x(t_2) > \bar{x}_{i+1}$ for some time $t_2 > t_0$. Then there must exist a time $t_0 < t_1 < t_2$ such that $x(t_1) = \bar{x}_{i+1}$ by the intermediate value theorem (Zwischenwertsatz). But if $x(t)$ is such that $x(t_1) = \bar{x}_{i+1}$, then $x(t)$ must coincide with the equilibrium solution $x(t) \equiv \bar{x}_{i+1}$ (which follows from uniqueness of solutions of IVPs). This is a contradiction to our assumption and the claim is established.

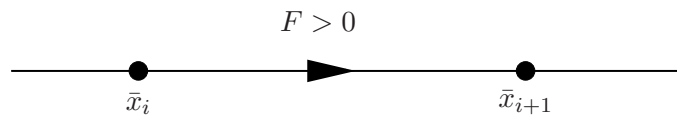
Here is a schematic picture of the ‘velocity field’ (corresponding to the vector field $F(x)$) between two fixed points. The case depicted is the case $F > 0$. (If $F < 0$, the arrows point in the other direction.)



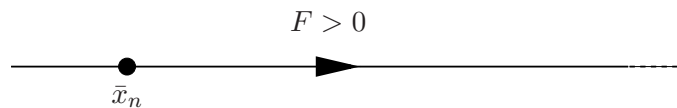
A solution $x(t)$ of (5.18) must be such that the depicted arrows are its velocity $\dot{x}(t)$. Accordingly, a solution with an initial value $x_0 \in (x_i, x_{i+1})$ satisfies

$$x(t) \rightarrow x_i \quad (t \rightarrow -\infty) \quad \text{and} \quad x(t) \rightarrow x_{i+1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

We draw a schematic picture of this behavior:



Having understood the behavior of solutions with initial values between two fixed points, let us turn to solutions that ‘move’ in one of the intervals $(-\infty, \bar{x}_1)$ and (\bar{x}_n, ∞) . Let us consider the latter and let us again assume that $F > 0$ on (\bar{x}_n, ∞) .



Obviously, $x(t) \rightarrow \bar{x}_n$ as $t \rightarrow -\infty$, but what happens as t grows? Two scenarios for $x(t)$ are possible:

- (i) The solution $x(t)$ exists for all times t (in other words, the maximal interval of existence is \mathbb{R}) and $x(t)$ reaches infinity only in the asymptotic limit: $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$).
- (ii) The solution exists for a finite time only, i.e., the maximal interval of existence is an interval $(-\infty, t_+)$ with $t_+ < \infty$. In this case, the solution escapes to infinity in finite time, i.e., $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow t_+$).

Whether we deal with case (i) or (ii) depends on the differential equation, i.e., on F ; more specifically, it is the *asymptotic properties of F* that determine the behavior of $x(t)$:

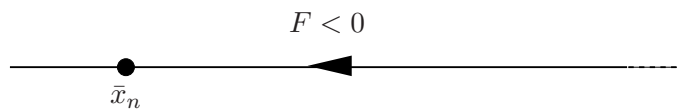
Consider the IVP with $x(t_0) = x_0 > \bar{x}_n$; w.l.o.g. we have $F(x) > 0$; the solution of the IVP is determined through

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{F(x)} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0, \tag{5.20}$$

see the previous section. Suppose that the integral on the l.h. side diverges as $x \rightarrow \infty$; then the r.h. side diverges as well. In order for the r.h.s. to diverge, t must go to infinity, i.e., $t \rightarrow \infty$. Accordingly, $x \rightarrow \infty$ corresponds to $t \rightarrow \infty$ and we are in case (i). Suppose that the integral on the l.h. side converges as $x \rightarrow \infty$; then the r.h. side converges as well. In order for the r.h.s. to converge, there must exist a t_+ such that $t \rightarrow t_+$. Accordingly, $x \rightarrow \infty$ corresponds to $t \rightarrow t_+$ and we are in case (ii). Summarizing,

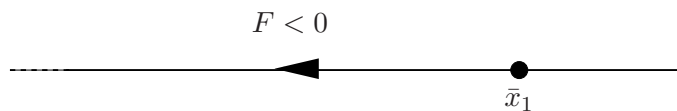
$$\text{Case (i)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int \frac{dx}{F(x)} = \infty \qquad \text{Case (ii)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int \frac{dx}{F(x)} < \infty. \tag{5.21}$$

The analysis is completely analogous when $F < 0$ on (\bar{x}_n, ∞) .



The two scenarios are: (i) $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) and (ii) $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow t_-$), where $t_- > -\infty$. The criterion (5.21) holds literally.

Evidently, the same considerations apply when one studies the behavior of solutions $x(t)$ that go to $-\infty$ instead of $+\infty$.



In that case, the divergence/convergence of

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x \frac{dx}{F(x)}$$

decides whether we are in case (i), i.e., $x(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow \infty$), or case (ii), i.e., $x(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow t_+$, $t_+ < \infty$).

EXAMPLE

Consider the function

$$F(x) = 1 + x + \log |x|. \quad (5.22)$$

For very large x we have

$$F(x) \sim x;$$

this is the asymptotic behavior of the function as $x \rightarrow \infty$. This enables use to check (5.21) in a straightforward manner:

$$\int^x \frac{dx}{F(x)} \simeq \int^x \frac{dx}{x} = \log x \Big|_c^x = \log x + c.$$

This is divergent as $x \rightarrow \infty$; therefore we are in case (i): Solutions of $\dot{x} = F(x)$ do not escape to infinity ($+\infty$) in finite time (but in infinite time); the maximal interval of existence is \mathbb{R} . The behavior towards $-\infty$ is analogous.

EXAMPLE

Consider the function

$$F(x) = (1 + x)^2. \quad (5.23)$$

For very large x we have

$$F(x) \sim x^2;$$

this is the asymptotic behavior of the function as $x \rightarrow \infty$. This enables use to check (5.21) in a straightforward manner:

$$\int^x \frac{dx}{F(x)} \simeq \int^x \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_c^x = -\frac{1}{x} + c.$$

This is convergent as $x \rightarrow \infty$; therefore we are in case (ii): Solutions of $\dot{x} = F(x)$ escape to $+\infty$ in finite time. The behavior towards $-\infty$ is analogous.

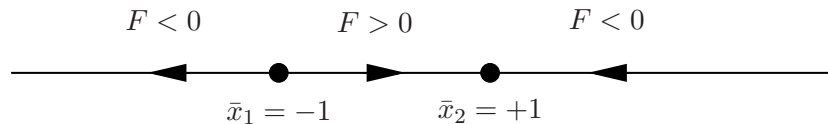
So much for the preparations. Let us discuss a number of examples to see how well the qualitative analysis of differential equations really works:

EXAMPLE

Consider the differential equation

$$\dot{x} = 1 - x^2, \quad (5.24)$$

i.e., $F(x) = 1 - x^2$. There exist two fixed points, $\bar{x}_1 = -1$ and $\bar{x}_2 = 1$, which correspond to two equilibrium solutions. In the interval $(-\infty, -1)$ the function F on the r.h. side of (5.24) is negative, in $(-1, 1)$ it is positive, and in $(1, \infty)$ negative. We obtain the qualitative picture



The set of solutions (i.e., the general solution) of (5.24) thus consists of the equilibrium solutions $x(t) \equiv -1$, $x(t) \equiv 1$, and three types of functions $x(t)$:

- $x(t) \rightarrow -1$ ($t \rightarrow -\infty$) and $x(t) \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow t_+$),
- $x(t) \rightarrow -1$ ($t \rightarrow -\infty$) and $x(t) \rightarrow +1$ ($t \rightarrow \infty$),
- $x(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow t_-$) and $x(t) \rightarrow +1$ ($t \rightarrow \infty$).

It remains to check whether $t_{\pm} = \pm\infty$ or whether $t_{\pm} = \text{finite}$. To that end we note that the asymptotic behavior of $F(x)$ is $F(x) \sim -x^2$ as $x \rightarrow \pm\infty$. Therefore,

$$\int \frac{dx}{F(x)} \simeq - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} \Big|_x = \frac{1}{x} + c,$$

which converges as $x \rightarrow \pm\infty$. This implies that both t_- and t_+ are finite (i.e., we are in case (ii), where the solutions escape to $\pm\infty$ in finite time).

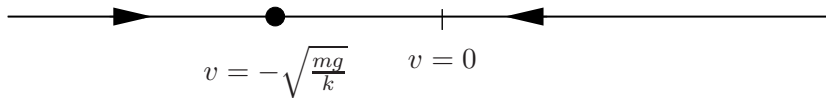
We have thus completely characterized the qualitative behavior of solutions of (5.24).

EXAMPLE

Consider again the ‘free fall’ example (5.10): $m\dot{v} = -mg - kv|v|$. (And here’s one of these unavoidable problems with notation. The function itself is called $v(t)$ here [instead of $x(t)$]; so the straight line we draw is the line of v -values.) There exists one fixed point,

$$\bar{v} = -\kappa^{-1} = -\sqrt{\frac{mg}{k}}, \quad (5.25)$$

cf. (5.11). The phase space diagram is simple:



We easily infer how the solution of the IVP (with the initial condition of (5.13), i.e., $v(0) = 0$) must behave: Since at $t = 0$ the solution must pass through the origin, we find that

$$v(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow t_-), \quad v(t) \rightarrow -\sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (5.26)$$

where $t_- > -\infty$. (Exercise: Show that $t_- > -\infty$.) This is exactly the behavior of the solution (5.15) of the IVP.

The qualitative analysis that we have performed can be extended to cover a problem of fundamental importance: We are able to analyze the behavior of solutions in the vicinity of a fixed point (i.e., close to a stationary solution).

In numerous applications in physics one is interested in exactly this problem. How do solutions behave that are close to being stationary? Or in other words: How do stationary solutions behave under perturbations?

To address this problem consider again (5.18), i.e., the equation

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad (5.27)$$

where we make the somewhat stronger assumption that F be at least \mathcal{C}^1 .

Suppose that \bar{x} is a fixed point, $F(\bar{x}) = 0$. Then, in a neighborhood of \bar{x} we can

make a Taylor expansion of $F(x)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \underbrace{F(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{F'(\bar{x})}_{=: \lambda} (x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}) = \lambda(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}); \quad (5.28)$$

we use the abbreviation $\lambda = F'(\bar{x})$.

Assume that $\lambda \neq 0$. In a sufficiently small neighborhood of the fixed point \bar{x} , the differential equation (5.27) is well approximated by

$$\dot{x}(t) = \lambda(x(t) - \bar{x}). \quad (5.29)$$

This is the so-called ‘**linearized equation**’. It is a simple exercise to solve this equation by means of the standard techniques; we obtain

$$x(t) = \bar{x} + c e^{\lambda t} \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (5.30)$$

as the general solution.

Therefore, consider a solution $x(t)$ of (5.27) and suppose that we find (after performing the qualitative analysis) that $x(t) \rightarrow \bar{x}$ as $t \rightarrow \infty$. Hence, for sufficiently large t , the solution $x(t)$ enters the neighborhood of \bar{x} , where the linearized equation is a good approximation; consequently, for sufficiently large t , the solution $x(t)$ must look like (5.30) (plus lower order error terms).

EXAMPLE

Consider the equation

$$\dot{x} = 1 - x^2 \quad (5.31)$$

of example (5.24) and consider the fixed point $\bar{x} = 1$. By definition, $F(\bar{x}) = 0$; moreover, $F'(\bar{x}) = -2$, hence $\lambda = F'(\bar{x}) = -2$. Since the Taylor expansion of F at $\bar{x} = 1$ is $F(x) = -2(x - 1) + O((x - 1)^2)$, the linearized system is

$$\dot{x} = -2(x - 1). \quad (5.32)$$

Consequently, those solutions that converge to $\bar{x} = 1$ as $t \rightarrow \infty$ behave like

$$x(t) = 1 + c e^{-2t} + \text{l.o.t.}$$

for sufficiently large t .

A similar analysis applies also in the case $\lambda = \mathbf{0}$ (where, however, we must assume that F is at least \mathcal{C}^2). Then the Taylor expansion of F at \bar{x} is

$$F(x) = \underbrace{F(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{F'(\bar{x})}_{=0} (x - \bar{x}) + \underbrace{\frac{1}{2}F''(\bar{x})}_{=: \mu} (x - \bar{x})^2 + o((x - \bar{x})^2). \quad (5.33)$$

The approximative equation (which is not linear in this case) is then

$$\dot{x} = \mu(\bar{x} - x)^2, \quad (5.34)$$

which can be solved to yield

$$x(t) = \bar{x} + \frac{1}{c - \mu t} \quad (c \in \mathbb{R}). \quad (5.35)$$

Modulo lower order terms, this represents the behavior of solutions when they are close to \bar{x} .

5.3 Separable Gleichungen

Separable Differentialgleichungen sind von der Gestalt

$$\dot{x} = F(x)G(t) \quad (5.36)$$

und verallgemeinern daher die autonomen Gleichungen 1. Ordnung. Anfangswerte werden vorgegeben wie immer, also $x(t_0) = x_0$.

Die Vorgehensweise um zu Lösungen in geschlossener Form zu gelangen ist analog zu der bereits in Abschnitt 5.1 diskutierten: Es gibt die Gleichgewichtslösungen (definiert durch $F(x) = 0$) und andere Lösungen, die wir durch Integration und Umkehrung erhalten. Ausgehend von

$$\dot{x} = F(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = F(x)G(t) \quad \xrightarrow{F(x) \neq 0} \quad \frac{dx}{F(x)} = G(t)dt \quad (5.37)$$

erhalten wir durch Integration

$$\underbrace{\int \frac{dx}{F(x)}}_{\hat{\mathcal{F}}(x)} = \underbrace{\int G(t)dt}_{\mathcal{G}(t)} + c, \quad (5.38)$$

wo c eine beliebige Konstante ist. Durch Verwenden der Umkehrfunktion von $\hat{\mathcal{F}}$ landen wir bei

$$x(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{G}(t) + c). \quad (5.39)$$

Zusammen mit den Gleichgewichtslösungen ist dies die allgemeine Lösung. Auch die AWP's werden exakt wie in Abschnitt 5.1 behandelt.

BEISPIEL

Wir betrachten die Gleichung

$$\dot{x} = x t. \quad (5.40)$$

Es gibt eine einzige Gleichgewichtslösung: $x \equiv 0$. Um die restlichen Lösungen zu erhalten dividieren wir durch x und integrieren

$$\frac{dx}{x} = t dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int t dt \quad \Rightarrow \quad \log x = \frac{t^2}{2} + c,$$

wo c eine freie Konstante ist. Damit erhalten wir

$$x(t) = \tilde{c} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \quad (\tilde{c} \in \mathbb{R}).$$

Ein eventuelles AWP kann jetzt wie üblich behandelt werden.

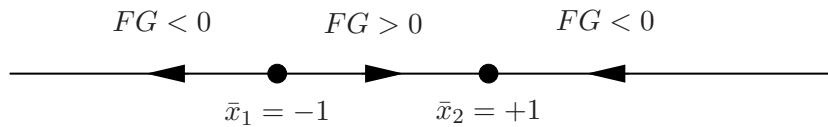
Eine qualitative Analyse der Differentialgleichung (5.36), ähnlich jener von Abschnitt 5.2, ist in einer großen Zahl von Fällen durchführbar. Der Einfachheit halber gehen wir hier lediglich exemplarisch vor:

Betrachten wir die Differentialgleichung

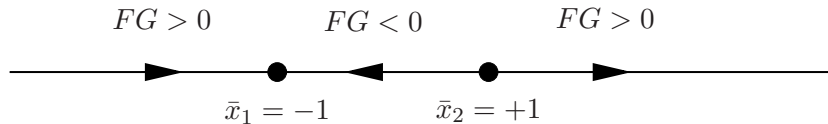
$$\dot{x} = (1 - x^2)G(t); \quad (5.41)$$

hier ist also $F(x) = 1 - x^2$. Für $G = 1$ reduziert sich diese Gleichung auf Beispiel (5.24). Insbesondere sind die Fixpunkte dieselben wie dort: $\bar{x}_1 = -1$ and $\bar{x}_2 = 1$.

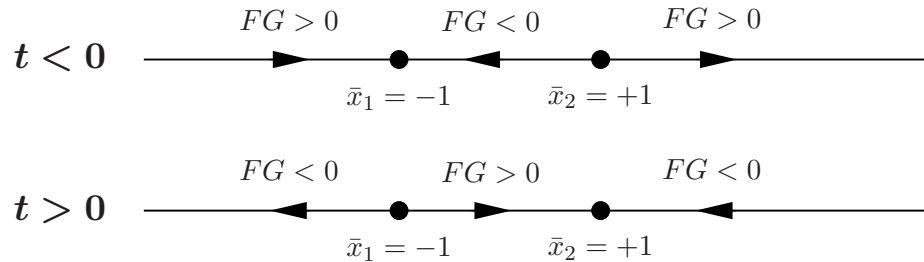
Angenommen G habe immer ein positives Vorzeichen, d.h. $G(t) > 0 \forall t$. Zwar ändert sich jetzt das Geschwindigkeitsfeld mit der Zeit (weil G nicht konstant ist); diese Änderung betrifft aber nur den Betrag des Vektorfeldes und nicht dessen Richtung: Die Pfeile variieren (mit t) in der Länge, aber nicht in der Richtung. Damit ändert sich das schematische Bild, das wir von Beispiel (5.24) kennen, überhaupt nicht. Folglich erhalten wir dieselben Resultate wie in Beispiel (5.24).



Im gegenteiligen Fall, d.h. $G(t) < 0 \forall t$, ist die Richtung des Vektorfeldes gerade umgekehrt. Das schematische Bild des Flusses ändert sich und die Aussagen verkehren sich in ihr Gegenteil. Z.B. gibt es nun eine Lösung $x(t)$ mit $x(t) \rightarrow +1$ ($t \rightarrow -\infty$) und $x(t) \rightarrow -1$ ($t \rightarrow \infty$).



Im allgemeinen Fall besitzt $G(t)$ jedoch kein Vorzeichen. Betrachten wir **z.B.** $G(t) = t$. Wir müssen unterscheiden zwischen $t < 0$ (weil dort $G < 0$ ist) und $t > 0$ (wo $G > 0$ ist). Dementsprechend erhalten wir zwei schematische Bilder:



Die Interpretation dieser Bilder ist problemlos: Die Gleichung (5.41) mit $G(t) = t$ hat drei Arten von Lösungen $x(t)$:

- $x(t)$ bewegt sich im Intervall $(-1, 1)$; für $t \rightarrow \pm\infty$ gilt $x(t) \rightarrow 1$;
- $x(t)$ bewegt sich in $(1, \infty)$; für $t \rightarrow \pm\infty$ gilt $x(t) \rightarrow 1$.
- $x(t)$ bewegt sich in $(-\infty, -1)$; das maximale Existenzintervall ist (t_-, t_+) ; im Limes $t \rightarrow t_-$ und $t \rightarrow t_+$ gilt $x(t) \rightarrow -\infty$. (Wir verwenden hierbei die gleichen Überlegungen wie bei Beispiel (5.24).)

Wir haben hier selbstverständlich ein paar Subtilitäten unterschlagen. Eine wichtige Voraussetzung für eine qualitative Analyse ist z.B. dass die Integrale

$$\int^{\infty} G(t)dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty} G(t)dt \tag{5.42}$$

unendlich sind. Wir gehen hier nicht näher darauf ein.

5.4 Lineare Gleichungen

Lineare Differentialgleichungen (v.a. 1. und 2. Ordnung) sind traditionellerweise einer der Schwerpunkte beim Studium der gewöhnlichen Differentialgleichungen, nicht zuletzt deshalb weil eine große Zahl von Differentialgleichungen in der Physik von diesem Typ sind. In diesem Zusammenhang sind Mathematica und andere Computeralgebraprogramme von unschätzbarem Vorteil — linearen Gleichungen sind ihre Stärke. Für uns bleibt daher nur zu verstehen warum die Mathematica Outputs so sind wie sie sind.

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in der Form

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (5.43)$$

wobei $a(x)$ und $b(x)$ gegebene Funktionen sind. (Aufgrund der Linearität sind die Voraussetzungen des Satzes über Existenz und Eindeutigkeit automatisch erfüllt, vorausgesetzt dass $a(x)$ und $b(x)$ zumindest stetige Funktionen sind.)

Und hier die Lösung:

```
In[1]:= DSolve[y' [x] + a[x] y[x] == b[x], y[x], x]
Out[1]= {{y[x] -> e^{\int_1^x -a[K[1]] dK[1]} C[1] + e^{\int_1^x -a[K[1]] dK[1]} \int_1^x e^{-\int_1^{K[2]} -a[K[1]] dK[1]} b[K[2]] dK[2]}}
```

Zur besseren Lesbarkeit ersetzen wir die Mathematica Variablen $K[1]$, $K[2]$, und die Konstante $C[1]$ durch “vernünftiger” Symbole:

$$y(x) = c e^{-\int_1^x a(x)dx} + e^{-\int_1^x a(x)dx} \int_1^x e^{\int_1^x a(x)dx} b(x) dx \quad (5.44)$$

Beim zweiten Hinsehen realisieren wir, dass Mathematica hier eine beliebige Wahl der Stammfunktion von $a(x)$ getroffen hat, nämlich

$$\int_1^x a(x)dx .$$

Wir könnten aber auch eine beliebige andere unterer Integrationsgrenze verwenden, z.B.

$$\int_0^x a(x)dx .$$

(Aufgabe: Setze diese Stammfunktion in (5.44) und zeige explizit, dass sich die Gestalt von (5.44) nicht ändert.) Die beste Wahl der Notation ist wohl jene, die

wir meistens für die Stammfunktion verwenden,

$$\int a(x) dx .$$

Jetzt wird (5.44) übersichtlicher:

$$y(x) = c e^{-\int a(x) dx} + e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx \quad (5.45)$$

Mit $c \in \mathbb{R}$ ist dies die allgemeine Lösung der Gleichung (5.43).

Es bleibt uns, die allgemeine Lösung (5.45) zu interpretieren. Betrachten wir zunächst den ersten Term, den wir $y_h(x)$ nennen wollen,

$$y_h(x) = c e^{-\int a(x) dx} \quad (c \in \mathbb{R}) . \quad (5.46)$$

Ableiten liefert

$$y_h' = c e^{-\int a(x) dx} (-a(x))$$

und daher

$$y_h' + a(x)y_h = 0 . \quad (5.43_h)$$

In Worten: **y_h löst die** (zu (5.43) gehörige) **homogene Gleichung**. (Eine einfache Übungsaufgabe: Gegeben sei die homogene Gleichung $y_h' + a(x)y_h = 0$. Ermittle deren allgemeine Lösung mit Hilfe der Methoden aus Abschnitt 5.3 und leite damit (5.46) her.)

*Eine äußerst wichtige Eigenschaft von homogenen linearen Differentialgleichung ist das **Superpositionsprinzip**. Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Gleichung $f' + a(x)f = 0$ (oder eine homogene lineare Differentialgleichung von höherer Ordnung) lösen, dann löst auch $f_1(x) + \lambda f_2(x)$ die Gleichung (für beliebiges λ). Dies widerspiegelt sich in der Tatsache, dass die freie Konstante in der allgemeinen Lösung multiplikativ auftritt (im Fall erster Ordnung) — siehe (5.46).*

Der zweite Term in der allgemeinen Lösung (5.45) der Gleichung (5.43), den wir $y_p(x)$ nennen wollen,

$$y_p(x) = e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx , \quad (5.47)$$

stimmt mit $y(x)$ überein, wenn wir in (5.45) $c = 0$ setzen. Daher: **$y_p(x)$ ist eine partikuläre Lösung** der Gleichung (5.43), siehe Abschnitt 3. (Eine einfache Übungsaufgabe: Zeige durch explizites Nachrechnen, dass (5.47) die Gleichung (5.43) löst.)

Mathematica behauptet daher, dass sich die allgemeine Lösung (5.45) der Gleichung (5.43) als die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung auffassen lässt. Alternativ lässt sich diese Aussage so ausdrücken: Zwei Lösungen der (inhomogenen) Gleichung (5.43), nennen wir sie $y_1(x)$ und $y_2(x)$, unterscheiden sich durch eine Lösung der homogenen Gleichung. (Wer Mathematica nicht glaubt, kann einen elementaren Beweis führen:

$$(y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = -a(x)y_1 + b(x) + a(x)y_2 - b(x) = -a(x)(y_1 - y_2);$$

was zu beweisen war.) Wir fassen zusammen:

Die allgemeine Lösung der linearen (inhomogenen) Differentialgleichung (5.43) ist die Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (5.43_h) und einer partikulären Lösung, z.B. (5.47).

$$y(x) = \underbrace{c e^{-\int a(x) dx}}_{y_h} + \underbrace{e^{-\int a(x) dx} \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx}_{y_p} \quad (5.48)$$

Mathematica ist natürlich keine wundersame Black Box, sondern folgt einfachen Methoden. Die Methode mittels welcher Mathematica die partikuläre Lösung (5.48) bestimmt heißt 'Variation der Konstanten'. Klarerweise muss selbst Mathematica scheitern, die Integrationen in (5.48) explizit auszuführen, wenn die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ kompliziert sind. Explizit geht's nur selten.

BEISPIEL

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' + ay = b, \quad (5.49)$$

wo a und b konstant sein sollen. Die Lösung der homogenen Gleichung $y' + ay = 0$ ist natürlich $y = c e^{-ax}$. Wir brauchen noch eine partikuläre Lösung (sind aber zu faul um Mathematica einzuschalten). Durch intensives Nachdenken zeigt sich: $y_p = \frac{b}{a}$ ist eine solche. Damit ist die allgemeine Lösung von (5.49)

$$y(x) = y_h + y_p = c e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Da die Gleichung (5.49) eine autonome Gleichung 1. Ordnung ist, hätten wir auch die Methoden aus Abschnitt 5.1 verwenden können um zur Lösung zu gelangen.

Mathematica hätt's natürlich auch gewusst:

```
In[1]:= DSolve[y' [x] + a y [x] == b, y [x], x]
```

```
Out[1]= {{y [x] -> \frac{b}{a} + e^{-a x} C [1]}}
```

BEISPIEL

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' + y = \sin x. \quad (5.50)$$

Mathematica kennt die Lösung:

```
In[11]:= DSolve[y' [x] + y [x] == Sin [x], y [x], x]
```

```
Out[11]= {{y [x] -> e^{-x} C [1] + \frac{1}{2} (-Cos [x] + Sin [x])}}
```

Wir sehen wieder die Struktur: Partikuläre Lösung plus allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

BEISPIEL

RADIOAKTIVE ZERFALLSKETTE: Sei $n(t)$ die Menge (Masse, Volumen, ...) einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t . Für den radioaktiven Zerfall gilt dass die Menge Δn des in einem (kleinen) Zeitintervall Δt zerfallenen Materials proportional zur vorhandenen Menge der Substanz (und der Länge des Zeitintervalls) ist, d.h. $\Delta n \propto -n\Delta t$. Für $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir die Differentialgleichung $dn = -\lambda n dt$, also $\dot{n} = -\lambda n$, wo λ die Zerfallskonstante ist (die sich leicht in die Halbwertszeit umrechnen lässt).

Wir betrachten nun eine (einfache) radioaktive Zerfallskette bestehend aus zwei radioaktiven Substanzen: Element A, dargestellt durch $n_A(t)$, zerfällt in Element B, dargestellt durch $n_B(t)$, welches wiederum in das stabile Element C übergeht. Die Zerfallskonstanten seien λ_A und λ_B . Für Element A erhalten wir

$$\Delta n_A = -\lambda_A n_A \Delta t \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_A = -\lambda_A n_A. \quad (5.51a)$$

Was ist mit Element B? Einerseits zerfällt Element B, andererseits kommt immer neues Material durch den Zerfall von A nach, nämlich $|\Delta n_A|$ während Δt :

$$\Delta n_B = -\lambda_B n_B \Delta t + |\Delta n_A| \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_B = -\lambda_B n_B - \dot{n}_A. \quad (5.51b)$$

(Beachte dass Δn_A negativ ist.) Element C ist stabil, daher wächst die Menge kontinuierlich, da B in C übergeht,

$$\Delta n_C = |\Delta n_B| \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_C = -\dot{n}_B \quad (5.51c)$$

Verwenden wir (5.51a) in (5.51b) erhalten wir

$$\dot{n}_B = -\lambda_B n_B + \lambda_A n_A. \quad (5.52)$$

Zum Glück können wir (5.51a) leicht lösen. Wir erhalten

$$n_A(t) = \hat{n}_A e^{-\lambda_A t}, \quad (5.53)$$

wo $n_A(0) = \hat{n}_A$ die Menge des Elements A zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet. Setzen wir dies in (5.52) ein, so erhalten wir eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für n_B .

Fortsetzung folgt...

BEISPIEL

... und hier die Fortsetzung. Diese Differentialgleichung lautet

$$\dot{n}_B = -\lambda_B n_B + \lambda_A \dot{n}_A e^{-\lambda_A t}. \quad (5.54)$$

Mathematica versorgt uns mit der allgemeinen Lösung:

```
In[12]:= DSolve[nb'[t] == -λb nb[t] + λa na[0] E^(-λa t), nb[t], t]
```

$$\text{Out[12]= } \left\{ \left\{ \text{nb}[t] \rightarrow e^{-t \lambda_b} C[1] + \frac{e^{-t (\lambda_a - \lambda_b)} - t \lambda_b \lambda_a \text{na}[0]}{-\lambda_a + \lambda_b} \right\} \right\}$$

```
In[13]:= Collect[%, C[1], Simplify]
```

$$\text{Out[13]= } \left\{ \left\{ \text{nb}[t] \rightarrow e^{-t \lambda_b} C[1] - \frac{e^{-t \lambda_a} \lambda_a \text{na}[0]}{\lambda_a - \lambda_b} \right\} \right\}$$

Schöner aufgeschrieben:

$$n_B(t) = c e^{-\lambda_B t} - \frac{\lambda_A \dot{n}_A}{\lambda_A - \lambda_B} e^{-\lambda_A t}. \quad (5.55)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung; die homogene Lösung ist der erste Term; der zweite Term ist eine partikuläre Lösung. Um noch ein wenig konkreter zu werden, formulieren wir ein AWP. Sei die ursprüngliche Menge von A gegeben durch $\dot{n}_A = 1$ (z.B. 1kg). Von Element B sei zu Beginn jedoch nichts vorhanden: $n_B(0) = \dot{n}_B = 0$. Wir könnten natürlich diese Anfangsbedingung in (5.55) einsetzen um die Konstante c und damit die Lösung des AWP zu ermitteln. Wir können aber auch Mathematica arbeiten lassen.

```
In[22]:= DSolve[{nb'[t] == -λb nb[t] + λa E^(-λa t), nb[0] == 0}, nb[t], t];
Simplify[%]
```

$$\text{Out[23]= } \left\{ \left\{ \text{nb}[t] \rightarrow \frac{e^{-t \lambda_a} (-1 + e^{t (\lambda_a - \lambda_b)}) \lambda_a}{\lambda_a - \lambda_b} \right\} \right\}$$

Schöner aufgeschrieben (Mathematica is' scho' a bisserl dumm):

$$n_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} \left(e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_A t} \right). \quad (5.56)$$

In dieser Formel liegt die Grundlage der *radiometrischen Datierung*! Noch eine Bemerkung: (5.56) ist für den Ausnahmefall $\lambda_A = \lambda_B$ nicht definiert; Aufgabe: Löse (5.54) für diesen Fall.

5.5 Exact differential equations

In the analysis of ODEs, exact differential equations are of particular importance. This is mainly for conceptual reasons; our conceptual understanding benefits from the study of exact differential equations, while, however, we learn rather little about ‘solving techniques’.

First, some preparations are needed. Consider a sufficiently differentiable function ϕ — \mathcal{C}^2 is sufficient— of two arguments, say x and y , i.e.,

$$\phi : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \phi(x, y) \in \mathbb{R}. \quad (5.57)$$

Since partial derivatives commute we automatically obtain

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Now suppose that are given two functions $p(x, y)$ and $q(x, y)$ (that are at least \mathcal{C}^1), which we combine into a vector-valued function

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

We ask the question of whether this function can be interpreted as a **gradient field**, i.e., whether there exists a scalar function ϕ of the form (5.57) such that

$$\begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \phi(x, y). \quad (5.58)$$

Assume that this is indeed the case for a given pair p and q . Then

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} p(x, y);$$

therefore the condition

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \quad (5.59)$$

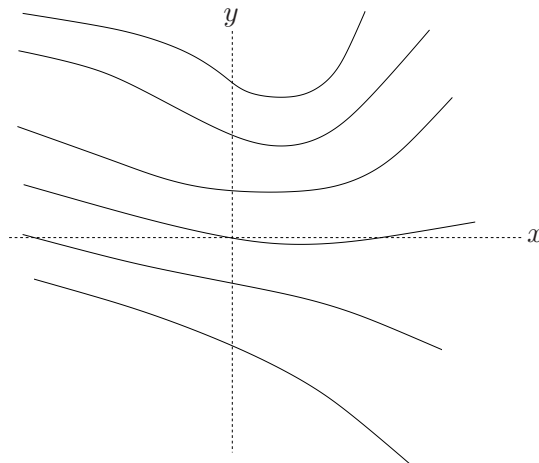
is a necessary condition for (5.58). It turns out that (5.59) is also a sufficient condition for (5.58) (at least on \mathbb{R}^2 or any other simply connected domain). (For a proof see any textbook or lecture course on Analysis.) The condition (5.59) is called an **integrability condition** for p, q . (An important question in physics that is directly related to these considerations is the question of whether a force

field \vec{F} is conservative, i.e., whether there exists a potential V such that the force field is obtained as the gradient field of the potential, $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$.)

Consider a differential equation of first order

$$y' = F(x, y) \quad (5.60)$$

for a function $x \mapsto y(x)$. As a matter of course, each solution of this equation can be interpreted as a graph in \mathbb{R}^2 . Furthermore, two graphs (that represent two different solutions) cannot intersect — provided the requirements of the Picard-Lindelöf theorem are met. (Proof: Consider two different solutions $y_1(x)$ and $y_2(x)$ and their respective graphs $(x, y_1(x))$ and $(x, y_2(x))$. Assume that these graphs intersect, i.e., there exists \hat{x} such that $(\hat{x}, y_1(\hat{x})) = (\hat{x}, y_2(\hat{x}))$; however, $y_1(\hat{x}) = y_2(\hat{x})$ implies that $y_1(x) = y_2(x) \forall x$, which is due to the uniqueness of solutions of IVPs, see the Picard-Lindelöf theorem. The completes our proof by contradiction.) Therefore, we expect that we obtain a picture like the following for the general solution of (5.60):



There is one question that suggests itself: Does there exist a function $\phi(x, y)$ such that each solution of the differential equation (5.60) (i.e., each graph in the figure) is an **equipotential curve of $\phi(x, y)$** ? (Locally, at least, this is a consequence of the existence and uniqueness result.)

Assume that this is the case, i.e., the graph $(x, y(x))$ of each solution $y(x)$ of the equation is represented by

$$\phi(x, y(x)) = c \quad (5.61)$$

for some c . Let us reconstruct how the differential equation that gives rise to (5.61) looks like. Differentiating this relation w.r.t. x and using the chain rule leads to

$$\phi(x, y(x)) = c \Leftrightarrow \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} y' = 0,$$

which is in turn equivalent to

$$y' = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)}. \quad (5.62)$$

Consequently, if the set of solutions of a differential equation (5.60) is represented by the equipotential lines of a function $\phi(x, y)$, then the differential equation (5.60) is of the form (5.62). This is occasionally called an **exact differential equation**. Conversely, if there exists a function $\phi(x, y)$ such that the differential equation takes the exact form (5.62), then the solutions are represented by the equipotential lines of this function $\phi(x, y)$.

In practice, we are given a differential equation

$$y' = F(x, y). \quad (5.63)$$

The obvious question to ask is whether we are able to view this equation as an exact differential equation or not. Does there exist a function $\phi(x, y)$ such that (5.63) can be written in the form (5.62)?

In a first step let us rewrite (5.63) as

$$y' = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}. \quad (5.64)$$

(Observe the minus sign!) Evidently, $p(x, y)$ and $q(x, y)$ are *not unique*.

EXAMPLE

Consider

$$y' = 2xy.$$

We could write

$$y' = -\frac{(-2x)}{y^{-1}} = -\frac{2xy^2}{(-y^{-3})} = -\frac{2x \sin(xy)}{(-y^{-1}) \sin(xy)} = -\frac{(-2xye^{-x^2})}{e^{-x^2}}$$

or anything else that comes to mind.

Let stick to one particular choice of $p(x, y)$ and $q(x, y)$. Then we must compare (5.62) and (5.64). To rewrite (5.64) in the form (5.62) it is required that there exists $\phi(x, y)$ such that

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = q(x, y), \quad (5.65)$$

i.e., $(p, q)^t$ must be a gradient field, cf. (5.58). By our considerations at the beginning of this section, this is the case if and only if the integrability condition (5.59) is satisfied. Therefore, if and only if the integrability condition

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \quad (5.66)$$

is satisfied, then there exists a function $\phi(x, y)$ such that

$$y' = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)} \quad (5.67)$$

and the solutions are represented by the equipotential lines of $\phi(x, y)$,

$$\phi(x, y(x)) = c \quad (c \in \mathbb{R}). \quad (5.68)$$

The actual form of $\phi(x, y)$ is obtained by a straightforward integration of (5.65); we integrate the first relation and obtain

$$\phi(x, y) = \underbrace{\int p(x, y) dx}_{P(x, y)} + \varphi(y). \quad (5.69a)$$

It remains to determine $\varphi(y)$; to this end we use the second relation of (5.65),

$$q(x, y) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} + \varphi'(y), \quad (5.69b)$$

which can be integrated straightforwardly. Reinserting the result for $\varphi(y)$ into Equation (5.69a) we are finished: We have obtained $\phi(x, y)$ and the solutions of the differential equation are $\phi(x, y(x)) = c$, $c \in \mathbb{R}$. (It's actually quite simple in the concrete examples.)

Let us emphasize again that the choice of $p(x, y)$ and $q(x, y)$ is not unique. If the integrability condition (5.66) holds for one particular choice of $p(x, y)$ and $q(x, y)$,

then we know that the differential equation we deal with is exact and the solution is (5.68) with (5.69). If the integrability condition (5.66) does not hold for one particular choice of $p(x, y)$ and $q(x, y)$, then we have obviously made a bad choice; another choice is needed to bring the equation to exact form. Unfortunately, as so often in life, making the right choice is difficult. (In general, making the right choice involves solving a partial differential equation.)

EXAMPLE

Consider the equation

$$y' = -\frac{y}{x}. \quad (5.70)$$

An obvious choice for p and q in accord with (5.64) is

$$p(x, y) = y, \quad q(x, y) = x \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{q} = -\frac{y}{x}.$$

The integrability condition is satisfied,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1 = \frac{\partial q}{\partial x},$$

hence the differential equation is in exact form. The potential $\phi(x, y)$ is obtained by using (5.65) or (5.69): First,

$$\phi(x, y) = \int p(x, y) dx + \varphi(y) = xy + \varphi(y). \quad (5.71)$$

Second, differentiation w.r.t. y yields

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = x + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} q(x, y) = x. \quad (5.72)$$

Hence $\varphi'(y) = 0$ and $\varphi(y) = \text{const}$, which entails that $\phi(x, y) = xy$ modulo a constant. It follows that the solutions of (5.70) are given by

$$xy = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

EXAMPLE

Consider the equation

$$y' = -\frac{x + y^2}{2xy + y}. \quad (5.73)$$

An obvious choice for p and q is

$$p(x, y) = x + y^2, \quad q(x, y) = 2xy + y \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{q} = -\frac{x + y^2}{2xy + y}.$$

The integrability condition is satisfied,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y = \frac{\partial q}{\partial x},$$

hence the differential equation is in exact form. The potential $\phi(x, y)$ is obtained by using (5.65) or (5.69): First,

$$\phi(x, y) = \int p(x, y)dx + \varphi(y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \varphi(y). \quad (5.74)$$

Second, differentiation w.r.t. y yields

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} q(x, y) = 2xy + y. \quad (5.75)$$

Hence $\varphi'(y) = y$ and $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$, which entails that

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \frac{1}{2}y^2 = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

represents the solution of (5.76). Clearly, an equivalent representation is given by $x^2 + 2xy^2 + y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

EXAMPLE

Consider the equation

$$y' = -\frac{1+y^2}{xy}. \quad (5.76)$$

An obvious choice for p and q is

$$p(x, y) = 1 + y^2, \quad q(x, y) = xy \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{q} = -\frac{1+y^2}{xy}.$$

However, the integrability condition is *not* satisfied,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial q}{\partial x},$$

hence the differential equation is not in exact form. We are compelled to find a different choice for p and q . We make an ansatz with an **integrating factor**:

$$p(x, y) = i(x, y)(1 + y^2), \quad q(x, y) = i(x, y)xy$$

However, for most purposes this ansatz is too general for us to handle (since it leads to PDEs). A simplified ansatz is

$$p(x, y) = i(x)(1 + y^2), \quad q(x, y) = i(x)xy,$$

i.e., the integrating factor depends on only one variable (either x or y). Let's see whether we can make the integrability conditions work by choosing $i(x)$ in an intelligent way.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2i(x)y \stackrel{!}{=} (i'(x)x + i(x))y = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

This equation suggests to use a factor $i(x)$ that satisfies $i'(x)x = i(x)$; solving this simple differential equation leads to $i(x) = x$ as a particular solution. We have thus found a good choice for p and q ,

$$p(x, y) = x(1 + y^2), \quad q(x, y) = x^2y \quad \Rightarrow \quad -\frac{p}{q} = -\frac{x(1 + y^2)}{x^2y},$$

which brings the differential equation (5.76) to exact form. The usual procedure then leads to $\phi(x, y) = x^2(1 + y^2) = c$ with $c \in \mathbb{R}$.

5.6 Substitutionen

Viele Differentialgleichungen lassen sich durch geschickte Substitutionen in lineare oder separable Differentialgleichungen überführen. Wir dürfen uns hier auf zwei klassische Beispiele beschränken (Mathematica weiß den Rest).

Eine Differentialgleichung

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (5.77)$$

ist vom *homogenen Typ*, falls gilt:

$$F(\lambda t, \lambda x) = F(t, x) \quad \forall \lambda \quad \forall (t, x), \quad (5.78)$$

d.h. wenn F homogen vom Grad null ist. (Eine Funktion $f(v)$, $v \in \mathbb{R}^n$, ist homogen vom Grad a , wenn $f(\lambda v) = \lambda^a f(v) \quad \forall \lambda \quad \forall v$.)

Jede solche Funktion lässt sich auffassen als Funktion des Quotienten x/t , d.h. es existiert eine Funktion \check{G} so dass

$$\dot{x} = F(t, x) = \check{G}\left(\frac{x}{t}\right). \quad (5.79)$$

(Wir unterdrücken Fragen bzgl. Definitionsbereich und Ähnliches.) Wir machen die Substitution

$$\check{u} = \frac{x}{t}. \quad (5.80)$$

Dann gilt

$$\frac{d\check{u}}{dt} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}(\dot{x} - \check{u}),$$

und daher erhalten wir eine separable Gleichung für \check{u} ,

$$\frac{d\check{u}}{dt} = \frac{1}{t}(\check{G}(\check{u}) - \check{u}), \quad (5.81)$$

die wir (mehr oder minder) lösen können.

Jede solche Funktion lässt sich auffassen als Funktion des Quotienten t/x , d.h. es existiert eine Funktion \hat{G} so dass

$$\dot{x} = F(t, x) = \hat{G}\left(\frac{t}{x}\right). \quad (5.79')$$

(Wir unterdrücken Fragen bzgl. Definitionsbereich und Ähnliches.) Wir machen die Substitution

$$\hat{u} = \frac{t}{x}. \quad (5.80')$$

Dann gilt

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{t\dot{x}}{x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{t}(\hat{u}^2\dot{x} - \hat{u}),$$

und daher erhalten wir eine separable Gleichung für \hat{u} ,

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{1}{t}(\hat{u}^2\hat{G}(\hat{u}) - \hat{u}), \quad (5.81')$$

die wir (mehr oder minder) lösen können.

BEISPIEL

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{tx + x^2}{t^2}. \quad (5.82)$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist homogen vom Grad null und lässt sich schreiben als Funktion von $\frac{x}{t}$,

$$\dot{x} = \frac{tx + x^2}{t^2} = \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2} = u + u^2 = G(u), \quad (5.83)$$

wobei wir die Substitution

$$u = \frac{x}{t} \quad (5.84)$$

eingeführt haben. Differentiation von u liefert

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}(\dot{x} - u) = \frac{1}{t}(G(u) - u). \quad (5.85)$$

Folglich,

$$\dot{u} = \frac{1}{t}u^2. \quad (5.86)$$

Das können wir natürlich lösen. Neben der Gleichgewichtslösung $u \equiv 0$ gibt es Lösungen

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{t} + c \quad (c \in \mathbb{R}), \quad (5.87)$$

und daher

$$-\frac{1}{u} = \log t + c \quad \Rightarrow \quad u(t) = -\frac{1}{\log t + c}, \quad (5.88)$$

woraus folgt

$$x(t) = tu(t) = -\frac{t}{\log t + c}. \quad (5.89)$$

Natürlich hätte Mathematica das auch gewusst:

```
In[12]:= DSolve[x'[t] == x[t]/t + x[t]^2/t^2, x[t], t]
```

```
Out[12]:= {{x[t] -> \frac{t}{C[1] - Log[t]}}
```

BEISPIEL

Man sollte sich nicht täuschen lassen. In der Praxis ist alles ziemlich kompliziert. Selbst eine so einfache Differentialgleichung wie

$$\dot{x} = 1 + \frac{x^2}{t^2} \quad (5.90)$$

ist schon nicht mehr ganz trivial. Das auftretende Integral ist

$$\int \frac{du}{1 - u + u^2},$$

was man natürlich durch geeignetes Nachdenken noch lösen kann (aber wer will das schon).

Für Mathematica kein Problem:

```
In[16]:= DSolve[x'[t] == 1 + x[t]^2 / t^2, x[t], t]
```

```
Out[16]= {{x[t] -> 1/2 (t + sqrt(3) t Tan[1/2 (sqrt(3) C[1] + sqrt(3) Log[t])])}}
```

BEISPIEL

Und noch ein sehr lehrreiches Beispiel:

```
In[1]:= DSolve[x'[t] == x[t] / t Exp[x[t] / t], x[t], t]
```

```
Out[1]= Solve[Integrate[1 / (-1 + Exp[K[1]]) K[1], {K[1], 0, x[t] / t}] == C[1] + Log[t], x[t]]
```

Wir sehen: Mathematica weiß ganz genau, was zu tun wäre; das Integral lässt sich jedoch nicht bestimmen. Für Differentialgleichungen dieser Art gilt daher eine wichtige Merkregel:

Was Mathematica nicht kann, das kann ich auch nicht.

Aber nicht vergessen: Eine qualitative Analyse ist vielleicht zielführend. Darin sind wir Mathematica (noch) überlegen.

Wir schließen dieses Kapitel mit der **Bernoulli-Gleichung**

$$y' + a(x)y = c(x)y^\alpha . \quad (5.91)$$

Ist $\alpha = 0$ reduziert sich diese Gleichung auf eine (inhomogene) lineare Gleichung, siehe (5.43); für $\alpha = 1$ erhalten wir eine (homogene) lineare Gleichung. Für andere Werte von α ist die Gleichung interessanter.

Wir versuchen die Substitution

$$z = y^s . \quad (5.92)$$

Dann folgt

$$z' = s y^{s-1} y' = s y^{s-1} (-a y + c y^\alpha) = -a s y^s + c s y^{s-1+\alpha} = -a s z + c s y^{s-1+\alpha} .$$

Durch die Wahl

$$s = 1 - \alpha \quad (5.93)$$

vereinfacht sich die Gleichung zu

$$z' = -a s z + c s , \quad (5.94)$$

oder, schön aufgeschrieben,

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)c(x) . \quad (5.95)$$

Dies ist eine lineare (inhomogene) Differentialgleichung, siehe Abschnitt 5.4.

Übrigens: **Mathematica** kennt die Bernoulli-Gleichung und deren allgemeine Lösung.

```
In[3]:= Simplify[DSolve[y'[x] + a[x] y[x] == c[x] y[x]^alpha, y[x], x]]
```

$$\text{Out[3]= } \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \left(e^{-(-1+\alpha) \int_1^x -a[k[1]] dk[1]} \left(c[1] - (-1+\alpha) \int_1^x e^{(-1+\alpha) \int_1^{k[2]} -a[k[1]] dk[1]} c[k[2]] dk[2] \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \right\} \right\}$$

Übungsaufgabe: Überprüfe den **Mathematica** Output, d.h. beweise, dass dies tatsächlich die allgemeine Lösung ist. (Vergleiche mit Abschnitt 5.4.)

6 Skalare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Manche Differentialgleichungen ‘lügen’ was ihre Ordnung angeht. Betrachten wir eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' = F(x, y'), \quad (6.1)$$

für irgendeine Funktion F . Streng genommen ist diese Gleichung von 2. Ordnung. Es ist jedoch eine Trivialität sie auf 1. Ordnung zu reduzieren. Wir definieren einfach

$$\tilde{y}(x) := y'(x) \quad (6.2)$$

und betrachten (6.1) als Gleichung für \tilde{y} :

$$\tilde{y}' = F(x, \tilde{y}). \quad (6.1')$$

Vorausgesetzt wir können die allgemeine Lösung von (6.1') finden, erhalten wir die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung (6.1) durch Integration, d.h.

$$y(x) = \int \tilde{y}(x) dx .$$

Im Allgemeinen aber sind Differentialgleichungen 2. Ordnung ungleich komplexer als Differentialgleichungen 1. Ordnung. Umso mehr ist es nötig sich auf einige wenige Grundtypen zu spezialisieren, die für die Physik von besonderer Bedeutung sind.

6.1 Erhaltungsgrößen

Die folgende Klasse von Differentialgleichungen 2. Ordnung ist besonders interessant. Wieder lässt sich hier eine Differentialgleichung 2. Ordnung (zumindest formell) auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung reduzieren.

Wir betrachten eine Differentialgleichung des Typs

$$y'' = F(y). \quad (6.3)$$

Dies ist eine autonome Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer Besonderheit: Die erste Ableitung der unbekannteten Funktion tritt nicht explizit auf.

Ähnlich wie in Abschnitt 5.2 wollen wir diese Gleichung mit qualitativen Mitteln lösen. Schreiben wir dazu in einem nullten Schritt die Differentialgleichung als

$$\ddot{x} = F(x) \quad (6.4)$$

und hauchen wir dieser Gleichung Leben ein: Ein Teilchen bewegt sich so, dass die Beschleunigung \ddot{x} des Teilchens am Ort x gegeben ist durch $F(x)$, interpretierbar als Kraft im Punkt x . Kurz: Ein Teilchen (mit Einheitsmasse) bewegt sich in einem Kraftfeld (gemäß den Newton'schen Bewegungsgleichungen).

Anstelle des 'Kraftfelds' $F(x)$ betrachten wir das '**Potential**' $V(x)$. Wir definieren

$$V(x) = - \int F(x) dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}. \quad (6.5)$$

Multiplizieren wir (6.4) mit \dot{x} . Es ergibt sich

$$\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx}\dot{x} = - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2} = - \frac{d}{dt} V(x), \quad (6.6)$$

woraus wir folgern, dass

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) \right) = 0. \quad (6.7)$$

Wir haben eine **Erhaltungsgröße** gefunden (die wir Energie nennen wollen):

$$E := \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x), \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (6.8)$$

Mit Hilfe dieser Erhaltungsgröße können wir ein AWP für die Differentialgleichung (6.4) auf ein AWP für eine Differentialgleichung 1. Ordnung zurückführen.

Gegeben sei das AWP

$$\ddot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1. \quad (6.9)$$

Aus den Anfangswerten können wir die Energie E der Lösung bestimmen:

$$E = \frac{\dot{x}(t)^2}{2} + V(x(t)) = \frac{\dot{x}(t_0)^2}{2} + V(x(t_0)) = \frac{x_1^2}{2} + V(x_0). \quad (6.10)$$

(Wir konnten hierbei benützen, dass E erhalten ist.) Da wir E kennen, lässt sich (6.8) als (autonome) Differentialgleichung 1. Ordnung für $x(t)$ interpretieren; das AWP (6.9) wird zu

$$\dot{x}^2 = 2(E - V(x)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (6.11)$$

Leider ist die Differentialgleichung in (6.11) nicht explizit sondern implizit. Wir erhalten

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V(x))}. \quad (6.12)$$

Immerhin sind diese Gleichungen separabel und können, zumindest formell, durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \pm dt \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = \pm \int_{t_0}^t dt = \pm(t - t_0). \quad (6.13)$$

Typischerweise haben wir es hier mit einem elliptischen Integral zu tun; die Umkehrung ist daher meist nicht möglich. Dennoch haben wir damit eine Differentialgleichung 2. Ordnung auf 1. Ordnung zurückgeführt und (zumindest formell) gelöst.

() Wirklich? Was haben wir denn eigentlich gezeigt? Wir haben gezeigt, dass die Lösung $x(t)$ des AWP (6.9) die Gleichung (6.12) und damit (6.13) erfüllen muss. Gilt die Umkehrung auch? Erfüllt jede Lösung von (6.12) (bzw. eines AWP) die ursprüngliche Gleichung (6.4)? Die Antwort ist: Beinahe. Problemfälle sind die Gleichgewichtslösungen von (6.12). Nicht jede Gleichgewichtslösung von (6.12) ist auch eine Lösung von (6.4). Immerhin sind alle anderen Lösungen von (6.12) auch Lösungen von (6.4). Wir gehen hier nicht genauer darauf ein. (Zumindest ein paar Hinweise: Bemerke die Wurzel in (6.12), die auf mögliche Probleme mit der Lipschitz-Stetigkeit hindeutet! Durch die Verletzung der Lipschitz-Stetigkeit entstehen Probleme mit der Eindeutigkeit von Lösungen; gleichzeitig funktioniert die qualitative Analyse aus Abschnitt 5.2 nur eingeschränkt.)*

Gehen wir anhand von Beispielen vor und beginnen mit der Gleichung

$$\ddot{x} = -x. \quad (6.14)$$

Dies ist die Gleichung des **harmonischen Oszillators**. (Tatsächlich kann die allgemeine Gleichung des harmonischen Oszillators, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, durch eine geeignete Transformation $t \mapsto \omega t$ immer auf diese Gestalt gebracht werden.) Die Gleichung (6.14) ist linear mit konstanten Koeffizienten. In Abschnitt 6.6 werden diese Gleichungen und ihre Lösungen im Detail diskutiert; in diesem speziellen Fall ist die Gleichung aber auch vom Typ (6.4) und wir können daher auch mit

einer Erhaltungsgröße (Energie) arbeiten. (Tatsächlich wär's am einfachsten, die Differentialgleichung durch Nachdenken zu lösen. Welche Funktion hat die Eigenschaft, dass die 2. Ableitung gleich minus der Funktion selbst ist? Da gab's doch $\sin t$ und $\cos t$, oder?)

Da $F = -x$ erhalten wir für das Potential

$$V(x) = - \int F(x) dx = \frac{x^2}{2}. \quad (6.15)$$

Die erhaltene Energie ist also

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}. \quad (6.16)$$

(Aufgabe: Zeige nochmals durch explizites Nachrechnen, dass $\dot{E} = 0$.) Wir gelangen daher zu den Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - V(x))} = \pm \sqrt{2E - x^2}, \quad (6.17)$$

die wir durch Separation lösen wollen. Wir erhalten

$$\frac{dx}{\sqrt{2E - x^2}} = \pm dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2}} = \pm t + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Netterweise lässt sich das Integral explizit ausführen,

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} = \pm t + c \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2E} \sin(\pm t + c). \quad (6.18)$$

Durch Verwenden der Identität $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ gelangen wir zu

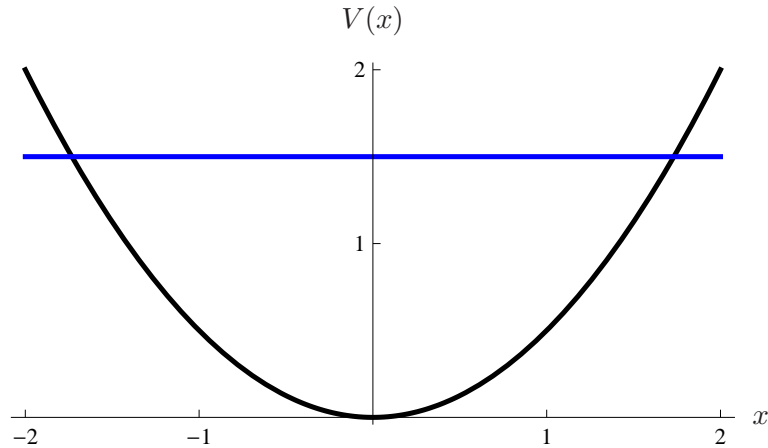
$$x(t) = \underbrace{\pm \sqrt{2E} \cos c}_{c_1} \sin t + \underbrace{\sqrt{2E} \sin c}_{c_2} \cos t, \quad (6.19)$$

wo $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, also tatsächlich zur allgemeinen Lösung der Gleichung (6.14).

() Haben wir nicht etwas vergessen? Ach ja, richtig. Beim Lösen von (6.17) haben wir uns gar nicht um eventuelle Gleichgewichtslösungen gekümmert (und das war in diesem Fall gut so). Die Gleichgewichtslösungen von (6.17) sind $x(t) = \sqrt{2E}$, und zwar für beliebiges E . Aber das sind i.A. (außer $E = 0$) keine Lösungen von (6.14)! Erwinnere: Nicht jede Gleichgewichtslösung von (6.12) ist auch eine Lösung von (6.4).*

Wir sehen, dass die Methode der Reduktion einer Differentialgleichung (6.4) auf erste Ordnung (6.12) mit Hilfe einer Erhaltungsgröße zwar (prinzipiell) funktioniert, aber doch sehr umständlich ist. *Die wahre Stärke der Methode der Erhaltungsgrößen liegt im qualitativen Bereich.*

Zeichnen wir das Potential (6.15) ein, d.h. $V(x) = \frac{x^2}{2}$, und fixieren wir eine Energie E (waagrechte Linie). Erinnerung: Die Energie ist immer eindeutig aus den Anfangswerten, d.h. Ort und Geschwindigkeit bei $t = t_0$, bestimmt, siehe (6.10).



Was macht eine Lösung $x(t)$ mit dieser Energie? Die Lösung entspricht der Bewegung eines Teilchens im Potential $V(x)$. Weil

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \text{const}, \quad (6.20)$$

können wir für jeden Ort x den Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens an diesem Ort ermitteln,

$$|\dot{x}| = \sqrt{2E - x^2}.$$

Insbesondere: Im Minimum des Potentials (d.i. bei $x = 0$) ist die Geschwindigkeit maximal,

$$\frac{\dot{x}^2}{2} \Big|_{x=0} = E - \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0} = E \quad \Rightarrow \quad |\dot{x}| \Big|_{x=0} = \sqrt{2E}. \quad (6.21)$$

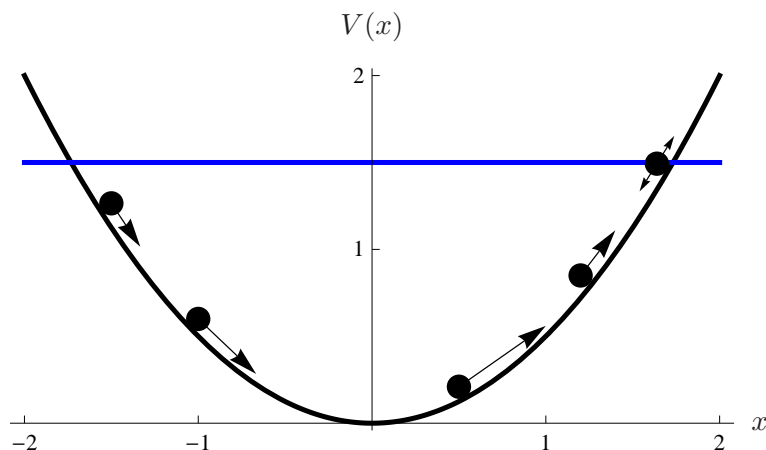
An zwei Punkten, x_{\pm} , steckt die gesamte Energie des Teilchens in der potentiellen Energie; die Geschwindigkeit ist null,

$$V(x_{\pm}) = E \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \Big|_{x=x_{\pm}} = \pm \sqrt{2(E - V(x_{\pm}))} = 0. \quad (6.22)$$

Diese Punkte heißen *Umkehrpunkte*; in unserem Beispiel gilt: $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E} \approx \pm 1.8$ (außerdem ist $V'(x_{\pm}) \neq 0$).

Wir geben folgende Definition: Ein Punkt \hat{x} heißt **Umkehrpunkt** (für eine Lösung mit Energie E), wenn $V(\hat{x}) = E$ und $V'(\hat{x}) \neq 0$.

An den Umkehrpunkten ändert das Teilchen seine Geschwindigkeitsrichtung (was wir in (6.32) ganz allgemein beweisen werden). Hier ein schematisches Bild, das die Bewegung des Teilchens wiedergibt:



Die qualitative Analyse der Gleichung (6.14) führt zwar nicht zur genauen Gestalt der Lösungen. Wir erhalten jedoch eine Fülle von Informationen über die Lösungen der Gleichung (6.14):

- Jede Lösung $x(t)$ deren Energie positiv ist, $E > 0$, *oszilliert* zwischen zwei (Umkehr)Punkten. Diese sind gegeben durch $V(x_{\pm}) = E$, also $x_{\pm} = \pm\sqrt{2E}$. Die Amplitude der Oszillation ist daher direkt durch E bestimmt.
- Es gibt eine *Gleichgewichtslösung*, nämlich jene mit $E = 0$. (Das Teilchen sitzt im Minimum des Potentials.)

Wir haben somit die allgemeine Lösung von (6.14) qualitativ beschrieben.

Wie mächtig die qualitative Analyse bei (vielen) Differentialgleichungen vom Typ (6.4) wirklich ist, sehen wir anhand des nächsten Beispiels, das wir genau studieren wollen.

Wir betrachten die Differentialgleichung vom Typ (6.4)

$$\ddot{x} = -4 - 2x + 3x^2 \quad (6.23)$$

und folgende AWP

- ① $x(t_0) = -1, \dot{x}(t_0) = 2$
- ② $x(t_0) = +3, \dot{x}(t_0) = -2\sqrt{3}$
- ③ $x(t_0) = -1, \dot{x}(t_0) = 3.71$
- ④ $x(t_0) = -1, \dot{x}(t_0) = 5$

Mathematica ist völlig überfordert:

In[434]= DSolve[x''[t] == -4 - 2 x[t] + 3 x[t]^2, x[t], t]

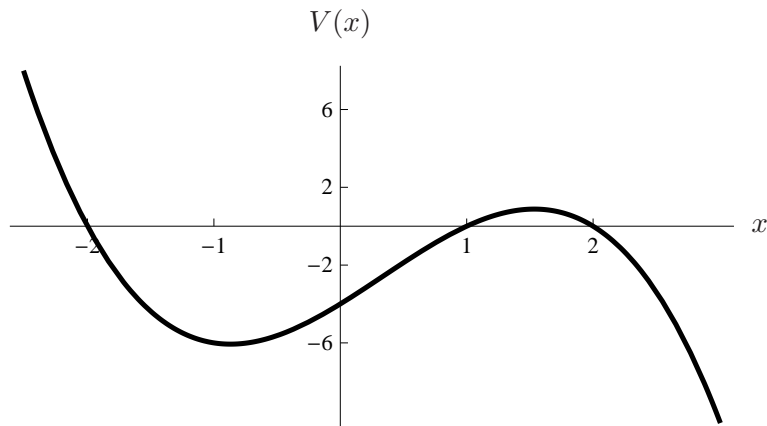
Out[434]= Solve[
 (4 EllipticF[ArcSin[√((Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3] - x[t]) / (-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 2] + Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3]))], (Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 2] - Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3]) /
 (Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 1] - Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3]))^2 (Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 2] -
 Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3]) (-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 1] + x[t])
 (-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 2] + x[t]) (-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3] + x[t]) /
 ((-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 1] + Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3])
 (-Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 2] + Root[C[1] - 8 #1 - 2 #1^2 + 2 #1^3 &, 3])
 (C[1] - 8 x[t] - 2 x[t]^2 + 2 x[t]^3)) == (t + C[2])^2, x[t]]

Wir führen also eine *qualitative Analyse* durch. Bestimmen wir im ersten Schritt das Potential. Es gilt

$$V(x) = - \int F(x) dx = 4x + x^2 - x^3 + \text{const} . \tag{6.24}$$

Wir treffen eine geschickte Wahl der Konstanten und erhalten

$$V(x) = 4x + x^2 - x^3 - 4 = -(x + 2)(x - 1)(x - 2) . \tag{6.25}$$



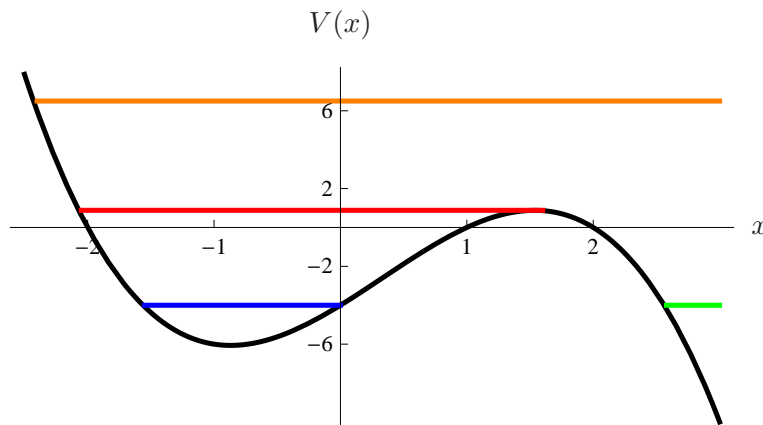
Die erhaltene Energie ist daher gegeben durch

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} - (x+2)(x-1)(x-2). \quad (6.26)$$

Für die AWP's ergibt sich:

- ① $E = -4$
- ② $E = -4$
- ③ $E = 0.88$
- ④ $E = 6.5$

Wir zeichnen die zu den AWP's gehörigen Energien ein:



Das qualitative Verhalten der Lösungen ist nun direkt ablesbar.

- ① $x(t_0) = -1$; $E = -4$. Das Teilchen befindet sich im Potentialtopf. Die Lösung oszilliert zwischen zwei Umkehrpunkten (gegeben durch die Gleichung $V(x_{\pm}) = E$). Mathematica kann die Umkehrpunkte leicht bestimmen.

In[483]= `Solve[V[x] == -4, x]`

Out[483]= $\left\{ \{x \rightarrow 0\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (1 - \sqrt{17}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (1 + \sqrt{17}) \right\} \right\}$

Von Relevanz sind $x_+ = 0$ und $x_- = (1 - \sqrt{17})/2$; der dritte Umkehrpunkt betrifft die nächste Lösung.

- ② $x(t_0) = +3$; $E = -4$. Das Teilchen befindet sich außerhalb des Potentialtopfs. Die Lösung bewegt sich anfänglich (von $x(t_0) = 3$ ausgehend) nach

links, da $\dot{x}(t_0) < 0$, kehrt am Umkehrpunkt $(1 + \sqrt{17})/2$ um und läuft danach nach rechts (ins Unendliche).

- ③ $x(t_0) = -1$; $E = 0.88$. Die Lösung bewegt sich nach rechts in Richtung des lokalen Maximums des Potentials. Da ihre Energie genau der des Maximums entspricht (nachrechnen!), konvergiert die Lösung gegen diesen Punkt für $t \rightarrow \infty$. (Die Aussage ist intuitiv klar; der Beweis ist nicht besonders schwer; siehe auch (iii) weiter unten.) (Und was macht die Lösung für $t \rightarrow -\infty$?)
- ④ $x(t_0) = -1$; $E = 6.5$. Die Lösung bewegt sich nach rechts. Ihre Energie ist größer als die des lokalen Maximums, daher läuft die Lösung über das Maximum hinweg (und läuft dann ins Unendliche).

Offensichtlich gibt es in diesem Beispiel zwei *Gleichgewichtslösungen*: Das Teilchen kann im lokalen Minimum des Potentials sitzen oder auf dem lokalen Maximum.

Gleichgewichtslösungen sind charakterisiert durch $x(t) = \dot{x} = \text{const} \forall t$; es folgt $\dot{x} \equiv 0$ und $\ddot{x} \equiv 0$. Gleichgewichtslösungen einer Differentialgleichung des Typs (6.4), also

$$\ddot{x} = F(x), \quad (6.27)$$

sind daher eindeutig gekennzeichnet durch die Bedingungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. (Erinnere: Differentialgleichung 2. Ordnung — zwei (Anfangs)bedingungen.) Da $F = -V'$, entsprechen die Nullstellen von $F(x)$ den lokalen Extrema des Potentials $V(x)$.

In unserem Beispiel,

$$\ddot{x} = F(x) = -V'(x) = -4 - 2x + 3x^2 \quad (6.28)$$

erhalten wir:

In[484]:= `Solve[V' [x] == 0, x]`

Out[484]= `{{x -> 1/3 (1 - Sqrt[13])}, {x -> 1/3 (1 + Sqrt[13])}}`

Die Gleichgewichtslösung $x = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$ ist **stabil**. Dies bedeutet, dass Lösungen mit Anfangsdaten (und damit einem Wert der Energie) (beliebig) nahe an der Gleichgewichtslösung für alle Zeiten (beliebig) nahe an der Gleichgewichtslösung bleiben. (Hier oszillieren diese Lösungen um die Gleichgewichtslage.) Stabile Gleichgewichtslösungen entsprechen lokalen Minima des Potentials.

Die Gleichgewichtslösung $x = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{13})$ ist **instabil**. Dies bedeutet, dass es Lösungen mit Anfangsdaten (und damit einem Wert der Energie) (beliebig) nahe

an der Gleichgewichtslösung gibt, welche von der Gleichgewichtslösung für spätere Zeiten stark abweichen. Instabile Gleichgewichtslösungen entsprechen lokalen Maxima des Potentials. (Wir verzichten auf weitere Subtilitäten.)

Ähnlich wie in Abschnitt 5.2 kann die qualitative Analyse um einiges weiter getrieben werden. Insbesondere drängen sich folgende Fragen auf:

- (i) Wie verhalten sich Lösungen, die nur gering von einer stabilen Gleichgewichtslösung abweichen?
- (ii) Wie verhalten sich Lösungen in der Nähe der Umkehrpunkte?
- (iii) Wie verhalten sich Lösungen, die gegen eine (instabile) Gleichgewichtslösung konvergieren?
- (iv) Wie schnell gehen Lösungen gegen $\pm\infty$?

Zu diesen Problemen gibt es weitreichende Aussagen. Wir gehen hier nur punktuell darauf ein. Die Methoden sind ganz analog zu jenen aus Abschnitt 5.2.

- (i) Angenommen wir hätten ein Potential $V(x)$ und eine stabile Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv \hat{x}$. Dann muss gelten: $V'(\hat{x}) = 0$ (lokales Extremum) und $V''(\hat{x}) > 0$ (lokales Maximum). Wegen $F(x) = -V'(x)$ gilt $F(\hat{x}) = 0$ und $-V''(\hat{x}) = F'(\hat{x}) < 0$. Wir entwickeln $F(x)$ in eine Taylorreihe und brechen nach dem ersten Term ab:

$$F(x) \approx \underbrace{F(\hat{x})}_{=0} + F'(\hat{x})(x - \hat{x}) = \underbrace{F'(\hat{x})}_{=-\omega^2}(x - \hat{x}).$$

Wir ersetzen die eigentliche Differentialgleichung $\ddot{x} = F(x)$ durch eine Approximation,

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - \hat{x}), \quad (6.29)$$

und machen eine simple Substitution: $z = x - \hat{x}$. Dann folgt

$$\ddot{z} = -\omega^2 z. \quad (6.30)$$

Dies ist die Gleichung des harmonischen Oszillators, siehe (6.14)ff oder Abschnitt 6.5. Die Lösung ist

$$z = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (6.31)$$

woraus folgt, dass

$$x(t) = \hat{x} + c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad (6.32)$$

eine approximative Lösung der Differentialgleichung (für Lösungen nahe an der Gleichgewichtslösung) ist.

- (ii) Ein Umkehrpunkt \hat{x} einer Lösung mit Energie E ist charakterisiert durch die Bedingungen $V(\hat{x}) = E$, $V'(\hat{x}) \neq 0$. (Wäre die letztere Bedingung verletzt, hätten wir es mit einem lokalen Extremum des Potentials zu tun.) Die Bedingung $V'(\hat{x}) \neq 0$ entspricht $F(\hat{x}) \neq 0$. Wir entwickeln $F(x)$ in eine Taylorreihe und brechen nach dem nullten Term ab:

$$F(x) = \underbrace{F(\hat{x})}_{=: \lambda} + o(x - \hat{x}).$$

Wir ersetzen die eigentliche Differentialgleichung $\ddot{x} = F(x)$ durch eine Approximation,

$$\ddot{x} = \lambda. \quad (6.33)$$

Dann folgt

$$x = \lambda \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_0. \quad (6.34)$$

Der Einfachheit halber legen wir fest, dass die Lösung bei $t = 0$ im Umkehrpunkt sein soll; also $x(0) = \hat{x}$ und $\dot{x}(0) = 0$. Wir schließen daraus dass eine Lösung approximativ durch

$$x(t) = \hat{x} + \lambda \frac{t^2}{2} \quad (6.35)$$

beschrieben wird, zumindest während der Zeit, in der die Lösung umkehrt.

- (iii) Leichte Übungsaufgabe.
 (iv) Schwierige Übungsaufgabe.

6.2 Conserved quantities, part II

Our previous section was based on the observation that the ‘energy’ (6.8),

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x),$$

where $V'(x) = F(x)$, is a conserved quantity for the differential equation (6.4),

$$\ddot{x} = F(x).$$

In this section we consider the more general differential equation

$$\ddot{x} = F(x)G(\dot{x}). \quad (6.36)$$

We define the potential $V(x)$ in complete analogy with (6.5), i.e.,

$$V(x) = - \int F(x) dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}.$$

Multiplying (6.36) with \dot{x} (and assuming $G(\dot{x}) \neq 0$) we obtain

$$\ddot{x}\dot{x} = F(x)G(\dot{x})\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} \frac{\dot{x}}{G(\dot{x})} = - \frac{dV}{dx} \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} T(\dot{x}) = - \frac{d}{dt} V(x),$$

where we have defined

$$T(z) = \int \frac{z dz}{G(z)}. \quad (6.37)$$

We conclude that

$$\frac{d}{dt} (T(\dot{x}) + V(x)) = 0; \quad (6.38)$$

hence we have found a **conserved quantity**,

$$E := T(\dot{x}) + V(x), \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (6.39)$$

If $T(\dot{x})$ is bounded from below (e.g., $T(\dot{x})$ is positive like $\frac{\dot{x}^2}{2}$), then E might be called an ‘energy’.

Making use of this conserved quantity we are able to reduce an IVP for (6.36) to an IVP for a separable ODE of first order. Consider the IVP

$$\ddot{x} = F(x)G(\dot{x}), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1. \quad (6.40)$$

The ‘energy’ E associated with the initial values is

$$E = T(\dot{x}(t)) + V(x(t)) = E \Big|_{t_0} = T(\dot{x}(t_0)) + V(x(t_0)) = T(x_1) + V(x_0). \quad (6.41)$$

Equation (6.39) now represents an (autonomous) differential equation of first order; the IVP (6.40) becomes

$$T(\dot{x}) = (E - V(x)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (6.42)$$

In general, (6.42) is an implicit ODE; we obtain

$$\dot{x} = T^{-1}(E - V(x)), \quad (6.43)$$

where T^{-1} is the inverse function of T .

Whether the reduction of (6.36) to (6.42) is useful in practice depends on the concrete example and in particular on the function $G(\dot{x})$.

EXAMPLE

Consider the ODE

$$\ddot{x} = \dot{x}F(x), \quad (6.44)$$

i.e., $G(\dot{x}) = \dot{x}$. It is straightforward to see that $T(\dot{x}) = \dot{x}$ in this example, hence

$$E = T(x) + V(x) = \dot{x} + V(x) \quad (6.45)$$

is conserved. (Note that E does not behave like an energy, because the ‘kinetic part’ $T(x)$ is not positive.) The IVP with initial values $x(t_0) = x_0$ and $\dot{x}(t_0) = x_1$ then reduces to the IVP

$$\dot{x} = E - V(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.46)$$

where $E = x_1 + V(x_0)$.

EXAMPLE

Let's make the previous example more concrete by considering

$$\ddot{x} = -\dot{x}x, \quad (6.47)$$

i.e., $F(x) = -x$ and $G(\dot{x}) = \dot{x}$. Since $V(x) = \frac{x^2}{2}$, the conserved quantity is

$$E = T(x) + V(x) = \dot{x} + \frac{x^2}{2}. \quad (6.48)$$

The IVP with initial values $x(t_0) = x_0$ and $\dot{x}(t_0) = x_1$ then reduces to the IVP

$$\dot{x} = E - V(x) = E - \frac{x^2}{2}, \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.49)$$

where $E = x_1 + V(x_0) = x_1 + \frac{x_0^2}{2}$; hence

$$\dot{x} = x_1 + \frac{x_0^2 - x^2}{2}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (6.50)$$

This autonomous first order ODE can be solved in closed form (or qualitatively); we get

$$\frac{dx}{dt} = x_1 + \frac{x_0^2 - x^2}{2} \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x_1 + \frac{x_0^2 - x^2}{2}} = t - t_0,$$

which can be integrated straightforwardly, when we use a partial fraction decomposition (Partialbruchzerlegung).

Note, incidentally, that (6.50) can be transformed to a form that we encountered before. Let

$$\tilde{x} = \alpha x, \quad \tilde{t} = \beta t;$$

then

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \left(x_1 + \frac{x_0^2}{2} - \frac{\tilde{x}^2}{2\alpha^2} \right).$$

We choose α and β in such a manner that

$$\frac{\alpha}{\beta} \left(x_1 + \frac{x_0^2}{2} \right) = 1, \quad \frac{1}{2\alpha\beta} = 1.$$

Then

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - \tilde{x}^2,$$

which is an equation that we encountered in (5.24).

EXAMPLE

Consider the ODE

$$\ddot{x} = |\dot{x}|F(x), \quad (6.51)$$

i.e., $G(\dot{x}) = |\dot{x}|$. Let us compute $T(\dot{x})$:

$$T(z) = \int \frac{z dz}{G(z)} = \int \frac{z dz}{|z|} = \int \operatorname{sgn} z \, dz = |z|.$$

The conserved quantity is thus

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = |\dot{x}| + V(x), \quad (6.52)$$

which can be interpreted as an energy, since $T \geq 0$, and we obtain an implicit ODE of first order

$$|\dot{x}| = E - V(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \pm(E - V(x)). \quad (6.53)$$

As a concrete example let us consider a generalization of the harmonic oscillator (6.14), where the force is assumed to be proportional to the displacement x and to the modulus (Betrag) of the velocity:

$$\ddot{x} = -|\dot{x}|x. \quad (6.54)$$

The ‘energy’ E is

$$E = |\dot{x}| + \frac{x^2}{2} \quad (6.55)$$

and the first order ODEs are

$$\dot{x} = \pm\left(E - \frac{x^2}{2}\right). \quad (6.56)$$

We proceed in analogy to (6.17)ff; separation of the variables and integration leads to the solution(s)

$$\sqrt{\frac{2}{E}} \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{\sqrt{2E}}\right) = \pm t + c \quad \Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{2E} \tanh\left(\pm \sqrt{\frac{E}{2}} t + c\right).$$

The interpretation of these solutions and the comparison with (6.19) is left as an exercise. (Note that the solutions do not oscillate!)

EXAMPLE

As an alternative to (6.54) consider

$$\ddot{x} = -(1 + |\dot{x}|)x, \quad (6.57)$$

i.e., $G(\dot{x}) = 1 + |\dot{x}|$ and $F(x) = -x$. Let us compute $T(\dot{x})$:

$$\begin{aligned} T(z) &= \int \frac{z dz}{1 + |z|} = \int \frac{(\operatorname{sgn} z)z d((\operatorname{sgn} z)z)}{1 + (\operatorname{sgn} z)z} \\ &= (\operatorname{sgn} z)z - \log(1 + (\operatorname{sgn} z)z) = |z| - \log(1 + |z|). \end{aligned}$$

The conserved quantity is thus

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = |\dot{x}| - \log(1 + |\dot{x}|) + \frac{x^2}{2}, \quad (6.58)$$

which can be interpreted as an energy, since $T \geq 0$. Note that

$$T(\dot{x}) = |\dot{x}| - \left(|\dot{x}| - \frac{|\dot{x}|^2}{2} + O(|\dot{x}|^3) \right) = \frac{|\dot{x}|^2}{2} + O(|\dot{x}|^3).$$

We obtain an implicit ODE of first order

$$T(\dot{x}) = E - V(x) = E - \frac{x^2}{2}, \quad (6.59)$$

which cannot be written in explicit form, since T does not have a neat inverse.

However, it is possible to proceed qualitatively, see pp. 73. The diagrams lead directly to the desired conclusions. In particular, the solutions of (6.57) are oscillating between two points x_{\pm} like solutions of the harmonic oscillator; the amplitude of these oscillations is $\sqrt{2E}$ (but note that the notion of ‘energy’ E is different). (Exercise: Prove that the solutions of (6.57) are oscillating. Hint: For small $|\dot{x}|$, the energy (6.58) is approximately the same as (6.20). Hence, in the neighborhood of a turning point (Umkehrpunkt), the solutions of (6.57) behave like those of the harmonic oscillator, cf. also (6.32). In particular, at a turning point, the solutions reverse direction and continue. This is important! In the previous example (6.54) this was not the case!)

6.3 Monotone Größen

Als Verallgemeinerung der Differentialgleichung (6.4) betrachten wir eine Gleichung des Typs

$$\ddot{x} = F(x) + \dot{x}G(t, x, \dot{x}) \quad (G \leq 0). \quad (6.60)$$

Analog zu Abschnitt 6.1 betrachten wir ein Potential V ,

$$V(x) = - \int F(x) dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = - \frac{dV(x)}{dx},$$

und die Größe

$$E := \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass E keine Erhaltungsgröße mehr ist,

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + V'(x)\dot{x} = \dot{x}(F + \dot{x}G) - F\dot{x} = \dot{x}^2G.$$

Jedoch ist nach Voraussetzung entweder $G > 0$ oder $G < 0$. Betrachten wir den letzteren Fall: $G < 0$. Dann folgt

$$\dot{E} = \dot{x}^2G < 0,$$

also ist die Größe E eine streng monoton fallende Funktion.

Mit Hilfe dieser monotonen Größe können wir in vielen Fällen ein AWP für die Differentialgleichung (6.60) qualitativ lösen. Wir beschränken uns auf ein konkretes Beispiel.

Wir betrachten in Verallgemeinerung von (6.23) die Gleichung

$$\ddot{x} = -4 - 2x + 3x^2 - \dot{x}; \quad (6.61)$$

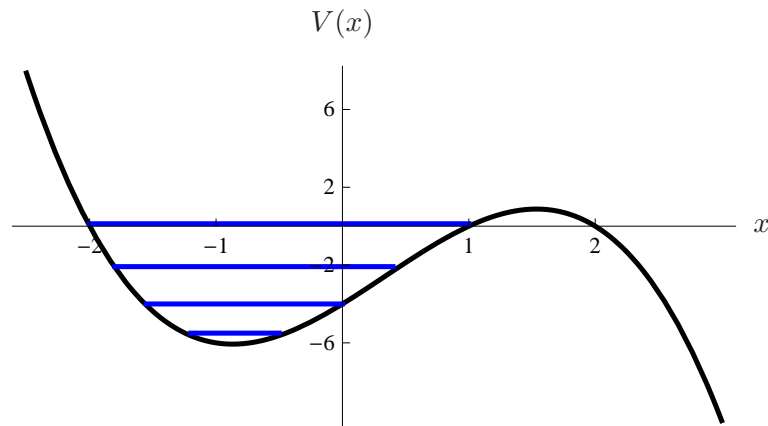
hier ist $F = -4 - 2x + 3x^2$ und $G = G(\dot{x}) = -1 < 0$. Man könnte den Term $-\dot{x}$ (oder i.A. $\dot{x}G(t, x, \dot{x})$) als **Dämpfungsterm** bezeichnen; ein komplizierterer Dämpfungsterm wäre z.B. $-\dot{x}^3(1 + x^2)$.

Das Bild des Potentials ist das Gleiche wie in Abschnitt 6.1. Der große Unterschied besteht nun darin, dass jetzt E eine monotone Größe (und keine Erhaltungsgröße) ist:

$$\dot{E} = -\dot{x}^2 < 0.$$

Bezeichnen wir die Größe E trotzdem als Energie.

Für die Differentialgleichung (6.61) ist die Energie nicht erhalten, sondern nimmt kontinuierlich ab.



Betrachten wir eine Lösung, die im Potentialtopf oszilliert. Während der Oszillationen gibt die Lösung immer mehr ‘Energie’ ab und fällt tiefer und tiefer in den Potentialtopf. Folglich konvergiert die Lösung gegen die stabile Gleichgewichtslösung für $t \rightarrow \infty$.

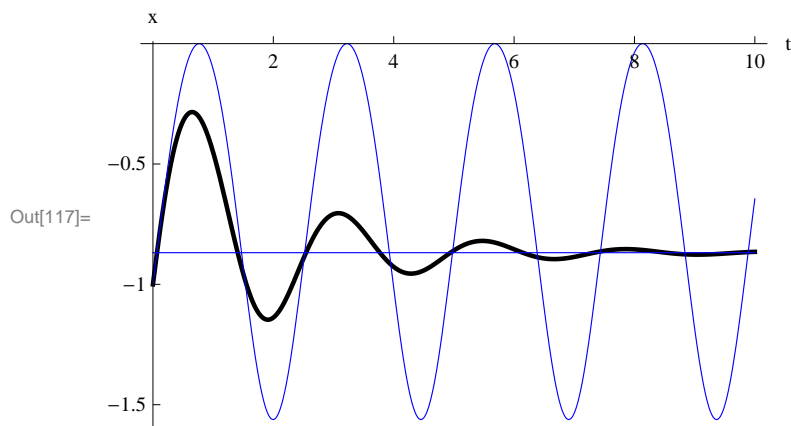
Zur Illustration betrachten wir einige Beispiele. Für die (ungedämpfte) Gleichung (6.23) haben wir mehrere AWP’s studiert. Dieselben AWP’s untersuchen wir nun für die gedämpfte Gleichung (6.61). Konzentrieren wir uns auf ① und ④.

Das AWP ① führte für die Gleichung (6.23) zu einer Lösung, die um die stabile Gleichgewichtslösung $\hat{x} = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{13})$ oszilliert. Für den gedämpften Fall (6.61) erhalten wir eine gedämpfte Schwingung. Mathematica liefert die folgenden (numerischen) Resultate:

```
In[115]:= xsolution = x /. NDSolve[{x''[t] == -4 - 2 x[t] + 3 x[t]^2 - x'[t],
    x[0] == -1, x'[0] == 2}, x, {t, 0, 10}][[1]]
ysolution = y /. NDSolve[{y''[t] == -4 - 2 y[t] + 3 y[t]^2,
    y[0] == -1, y'[0] == 2}, y, {t, 0, 10}][[1]]
Plot[{xsolution[t], ysolution[t], 1/3 (1 - Sqrt[13])},
{t, 0, 10}, PlotRange -> {-1.6, 0.01},
PlotStyle -> {{Black, Thick}, Blue, Blue}, AxesLabel -> {"t", "x"},
Ticks -> {{2, 4, 6, 8, 10}, {-1.5, -1, -0.5}}]
```

```
Out[115]= InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]
```

```
Out[116]= InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]
```



Das AWP ④ führte für die Gleichung (6.23) zu einer Lösung, die über die instabile Gleichgewichtslösung $\hat{x} = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{13})$ nach rechts hinweggeht, sodass $x(t)$ gegen unendlich geht. Der gedämpfte Fall (6.61) ist völlig verschieden. Die Lösung läuft zwar zunächst nach rechts; jedoch verliert die Lösung dauernd 'Energie'; bevor die Lösung den instabilen Gleichgewichtspunkt erreicht, hat sie schon zuviel Energie verloren (und kann nicht mehr über das lokale Maximum hinweg); die Lösung wird vom Potentialtopf gefangen. Mathematica liefert die folgenden (numerischen) Resultate für die Lösung des AWP ④ im gedämpften Fall.

```
In[86]:= xsolution = x /. NDSolve[{x''[t] == -4 - 2 x[t] + 3 x[t]^2 - x'[t],  

      x[0] == -1, x'[0] == 5}, x, {t, 0, 10}][[1]]  

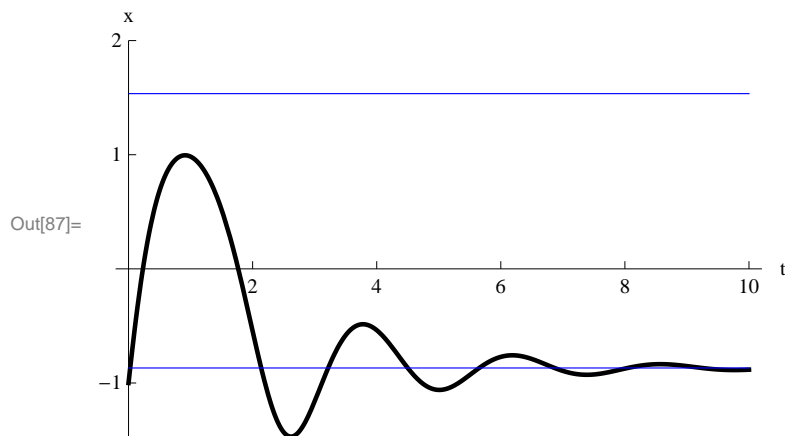
Plot[{xsolution[t], 1/3 (1 - Sqrt[13]), 1/3 (1 + Sqrt[13])},  

      {t, 0, 10}, PlotRange -> {-1.5, 2},  

      PlotStyle -> {{Black, Thick}, Blue, Blue}, AxesLabel -> {"t", "x"},  

      Ticks -> {{2, 4, 6, 8, 10}, {-1, 1, 2}}]
```

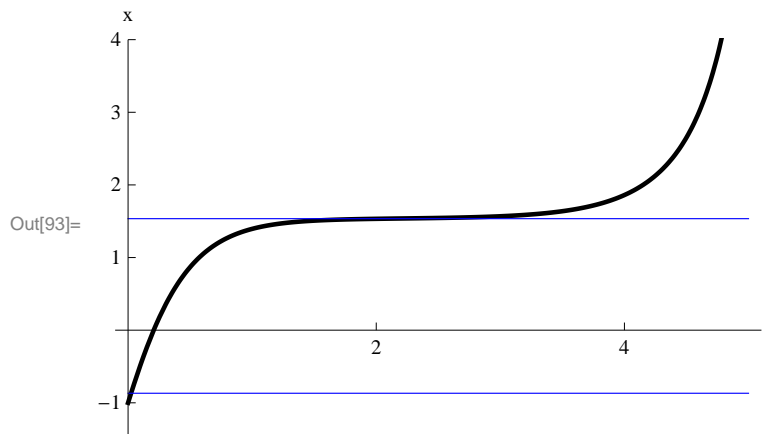
```
Out[86]= InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]
```



Betrachten wir zum Abschluß das AWP mit den folgenden Anfangsbedingungen: $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 5.4985$. Erst für diese Lösung reicht die anfängliche Energie (trotz Energieverlusts) aus, um (knapp) über das Maximum hinweg zu laufen.

```
In[92]:= xsolution = x /. NDSolve[{x''[t] == -4 - 2 x[t] + 3 x[t]^2 - x'[t],
    x[0] == -1, x'[0] == 5.4985}, x, {t, 0, 5}][[1]]
Plot[{xsolution[t], 1/3 (1 - Sqrt[13]), 1/3 (1 + Sqrt[13])},
{t, 0, 5}, PlotRange -> {-1.5, 4},
PlotStyle -> {{Black, Thick}, Blue, Blue}, AxesLabel -> {"t", "x"},
Ticks -> {{2, 4, 6, 8, 10}, {-1, 1, 2, 3, 4}}]
```

```
Out[92]= InterpolatingFunction[{{0., 5.}}, <>]
```



Wir schließen diesen Abschnitt mit einer weiteren qualitativen Bemerkung. Betrachten wir eine Gleichung ohne Dämpfungsterm, deren Lösungen in einem Potentialtopf oszillieren. Erhält die Gleichung einen (kleinen) Dämpfungsterm, so können wir erwarten, gedämpfte Schwingungen zu sehen. Ist jedoch die Dämpfung sehr groß, geht der oszillatorische Charakter der Lösungen verloren: Lösungen konvergieren monoton (entweder von links oder von rechts) gegen die stabile Gleichgewichtslösung (am Boden des Potentialtopfs). Das Paradebeispiel für dieses Verhalten ist die Gleichung

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - r\dot{x},$$

wo $r > 2\omega$. Für Details verweisen wir auf die Übungen.

Wir sehen: Mit monotonen Größen lassen sich zwar nicht so viele Fragestellungen qualitativ lösen wie für Erhaltungsgrößen. Einige wichtige Resultate ergeben sich jedoch ohne großen Aufwand, wie wir gerade anhand unseres Beispiels verdeutlicht haben.

6.4 The Wronskian

Let $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be two (sufficiently differentiable) functions. The **Wronskian** (*Wronski-Determinante*) associated with $\{y_1, y_2\}$ is defined as

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

The definition generalizes to sets of three (or more) functions; for instance, for a set of three functions $\{y_1, y_2, y_3\}$, the Wronskian is

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}.$$

The Wronskian of a set of functions is studied to investigate whether the functions are *linearly (in)dependent*. The basic statement (for a set of two functions) is as follows:

$$y_1 \text{ and } y_2 \text{ are linearly dependent} \quad \Rightarrow \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (6.62)$$

To prove (6.62), assume that y_1 and y_2 are linearly dependent. This means, by definition, that there exists a non-trivial pair $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ such that

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \quad (\forall x).$$

W.l.o.g. we may assume that $\lambda_2 \neq 0$; hence, $y_2(x) = -\lambda_1 \lambda_2^{-1} y_1(x)$. Accordingly, the Wronskian is

$$W(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

which established the claim of (6.62).

To analyze the converse of (6.62), let us begin with an illustrative example.¹

¹This example is due to Harald Ringbauer. It provides a counterexample to the claim made in an earlier version of these notes: It is in fact not sufficient to assume that y_1 and y_2 possess a discrete set of zeros to obtain the converse of (6.62); the correct statement follows.

EXAMPLE

Consider the functions

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}.$$

The Wronskian is

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0 & x \geq 0 \\ \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0 & x \leq 0 \end{cases} = 0,$$

i.e., $W(x)$ vanishes, but $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are *not* linearly dependent. (We have $y_1(x) - \operatorname{sgn} x y_2(x) = 0$, but there do not exist constants λ_1, λ_2 , such that $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.)

The example shows that the converse of (6.62) is false in general. However, under additional assumptions on the functions y_1 and y_2 the converse of (6.62) is in fact true: Consider two functions y_1 and y_2 , all of whose zeros are simple. Then

$$y_1 \text{ and } y_2 \text{ are linearly dependent} \iff W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (6.63)$$

To prove (6.63), assume that the Wronskian of the functions y_1 and y_2 vanishes, i.e.,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (6.64)$$

Eq. (6.64) implies that, for each x , the vectors

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

are linearly dependent. Neither of these vectors is the null vector (which is because $y_1'(x) \neq 0$ when $y_1(x) = 0$ and analogously for y_2 — the zeros of the functions are simple), Therefore, there exists $\lambda(x) \neq 0$ such that

$$\begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \lambda(x) \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix},$$

i.e.,

$$y_2(x) = \lambda(x)y_1(x) \quad \text{and} \quad y_2'(x) = \lambda(x)y_1'(x). \quad (6.65)$$

Differentiating the first equation of (6.65) we obtain

$$y_2'(x) = \lambda'(x)y_1(x) + \lambda(x)y_1'(x).$$

Employing the second equation of (6.65) we draw the conclusion

$$0 = \lambda'(x)y_1(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda'(x) = 0,$$

where we use the assumption $y_1(x) \neq 0$. We infer that $\lambda'(x) = 0$ for all x except at the zeros of the function. Since this is a discrete set, $\lambda' = 0$ holds almost everywhere; in addition, λ is continuous for all x (where continuity at the zeros of y_1 follows from the second equation of (6.65)); therefore,

$$\lambda = \text{const},$$

and $y_2(x) = \lambda y_1(x) \forall x$, i.e., y_1 and y_2 are linearly dependent, as claimed. This completes the proof of (6.63).

The statements (6.62) and (6.63) generalize. For instance,

$$y_1, y_2, y_3 \quad \text{are linearly dependent} \quad \Leftrightarrow \quad W := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \equiv 0. \quad (6.66)$$

(Recall that the direction \Leftarrow requires the functions to satisfy additional assumptions; it is sufficient to assume that the zeros of y_1, y_2, y_3 are at most of order 2.)

EXAMPLE

Consider the two functions $f_1 = 1$ and $f_2 = x$. (It is evident that f_1 and f_2 are linearly independent.) Let us compute the Wronskian of $f_1 = 1$ and $f_2 = x$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Since $W \neq 0$, $f_1 = 1$ and $f_2 = x$ are linearly independent (which confirms the evident).

EXAMPLE

The Wronskian of the functions $f_1 = \sin x$ and $f_2 = \cos x$ is

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1.$$

Hence $f_1 = \sin x$ and $f_2 = \cos x$ are linearly independent (which confirms the evident).

EXAMPLE

The question of whether two functions are linearly (in)dependent is in fact a very simple question (and computing the Wronskian to answer this question is like using a sledgehammer to crack a nut). For three (or more) functions, however, the Wronskian is indeed a rather useful tool. Consider, for instance, the functions $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin(2x)$, and $f_3 = \sin(3x)$. We get

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin(2x) & \sin(3x) \\ -\cos x & -2\cos(2x) & -3\cos(3x) \\ -\sin x & -4\sin(2x) & -9\sin(3x) \end{vmatrix} = -16(\sin x)^6.$$

(At least, this is what *Mathematica* claims.) Hence these functions are linearly independent (which is important in the context of Fourier series).

EXAMPLE

For the functions $f_1 = \sin x$, $f_2 = \sin(x + 1)$, and $f_3 = \sin(x + 2)$ we obtain

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin(x + 1) & \sin(x + 2) \\ -\cos x & -\cos(x + 1) & -\cos(x + 2) \\ -\sin x & -\sin(x + 1) & -\sin(x + 2) \end{vmatrix} = 0;$$

note that the first and the third row are proportional. Hence these functions are linearly dependent (because we notice that the zeros of the functions are simple zeros).

6.5 Linear homogeneous equations

Linear differential equations (especially those of second order) are of particular importance in physics. Mathematica and other computer algebra programs are of great help; but, of course, it is imperative that we are able to interpret Mathematica's output.

Consider a linear and homogeneous differential equation of 2nd order,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (6.67)$$

where $a_0(x)$ and $a_1(x)$ are given functions. (If a_0 and a_1 are at least continuous, then the requirements of the Picard-Lindelöf theorem are met.) Let's ask Mathematica for the general solution of this equation.

```
In[36]= DSolve[y''[x] + a1[x] y'[x] + a0[x] y[x] == 0, y[x], x]
InverseFunction::ifun :
  Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>
InverseFunction::ifun :
  Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses. >>
Out[36]= DSolve[a0[x] y[x] + a1[x] y'[x] + y''[x] == 0, y[x], x]
```

Mathematica does not know. Too bad.

The **superposition principle** is of central importance: Suppose that y_1 and y_2 are solutions of a linear homogeneous differential equation; then $y_1 + \lambda y_2$ (for an arbitrary λ) solves the equation as well. This can be proved by a direct calculation. The superposition principle states implies that the set of solutions of (6.67) (and of any other homogeneous linear ODE) form a **vector space** \mathcal{S}_h .

The next question suggests itself: What is the dimension of the vector space of solutions of (6.67)? Let us give the answer right away (and postpone the proof): The vector space \mathcal{S}_h of solutions of (6.67) is **two-dimensional**. Accordingly, a basis of \mathcal{S}_h consists of two (linearly independent) vectors (i.e., functions), which we denote by $\mathcal{Y}_1(x)$ and $\mathcal{Y}_2(x)$. Each solution $y(x)$ of (6.67) is represented by a (unique) linear combination of $\mathcal{Y}_1(x)$ and $\mathcal{Y}_2(x)$, i.e., there exists constants c_1 and c_2 such that

$$y(x) = c_1 \mathcal{Y}_1(x) + c_2 \mathcal{Y}_2(x) \quad (\forall x). \quad (6.68)$$

Usually, the functions $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ are called the independent solutions (**Fundamentalsystem**) of the equation (6.67).

The general solution of the homogeneous linear ODE of 2nd order (6.67) is given by (6.68), where $\mathcal{Y}_1(x)$ and $\mathcal{Y}_2(x)$ are two linearly independent solutions of (6.67).

In order to prove (6.68) we proceed in two steps: In step (i) we show that (6.67) does not admit more than two linearly independent solutions (i.e., the dimension of the vector space \mathcal{S}_h is at most 2). In step (ii) we show that there exist in fact two linearly independent solutions.

Step (i). Assume that the functions y_1 , y_2 , and y_3 are solutions of (6.67), i.e.,

$$\begin{aligned}y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) &= 0, \\y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) &= 0, \\y_3''(x) + a_1(x)y_3'(x) + a_0(x)y_3(x) &= 0.\end{aligned}$$

Let us rewrite these equations in matrix form,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & y_1''(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & y_2''(x) \\ y_3(x) & y_3'(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0(x) \\ a_1(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

This system of equations can be interpreted as a system of linear equations for $(a_0, a_1, 1)^t$; obviously, this system possesses a non-trivial solution, $(a_0, a_1, 1)^t$, from which we infer that the determinant of the coefficient matrix must vanish, i.e.,

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & y_1''(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & y_2''(x) \\ y_3(x) & y_3'(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Therefore, the Wronskian associated with $\{y_1, y_2, y_3\}$ vanishes and we are able to use (6.66) to conclude that the three functions must be linearly dependent. (Note that each of the functions y_1 , y_2 , y_3 possesses simple zeros. This is a simple consequence of (6.67), cf. the exercises.) Since three solutions of (6.67) are automatically linearly dependent, (6.67) can admit at most two linearly independent solutions.

Step (ii). To show that (6.67) has in fact two linearly independent solutions, we can invoke the existence and uniqueness theorem. Let y_1 be the (unique) solution of the IVP consisting of (6.67) and the initial conditions

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0.$$

Likewise, let y_2 be the solution of the IVP with

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Let us compute the Wronskian of $\{y_1, y_2\}$ at $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

The Wronskian is non-zero at $x = 0$, hence $W(x) \neq 0$, which implies by (6.62) that y_1 and y_2 must be linearly independent functions. This completes step (ii) and thus the proof of (6.68).

In the next sections we will see examples of linear homogeneous ODEs and examples of independent solutions (Fundamentalsysteme) \mathcal{Y}_1 and \mathcal{Y}_2 . In this section we will continue our theoretical considerations and address another issue, namely the **reduction of a linear homogeneous equation of 2nd order to an equation of 1st order**.

Consider the linear homogeneous equation of 2nd order (6.67). Assume that we are given a solution ('seed solution'), which we denote by $\mathcal{Y}_1(x)$. (This is an important requirement: **One solution must already be known**.) Then we can obtain a second (linearly independent) solution $\mathcal{Y}_2(x)$ by solving a first order ODE. To this end, consider the Wronskian W of two solutions y_1, y_2 of (6.67), i.e.,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Let us differentiate the Wronskian:

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \stackrel{(6.67)}{=} y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - (-a_1 y_1' - a_0 y_1) y_2 \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_1' y_2) = -a_1 W. \end{aligned}$$

Accordingly, the Wronskian satisfies a linear homogeneous ODE of first order,

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0. \quad (6.69)$$

The solution of this equation follows straightforwardly from Section 5.4,

$$W(x) = c e^{-\int a_1(x) dx}. \quad (6.70)$$

This expression for $W(x)$ can be employed to find a second solution \mathcal{Y}_2 , once a solution \mathcal{Y}_1 is given: Consider the Wronskian

$$W(x) = \mathcal{Y}_1(x)\mathcal{Y}_2'(x) - \mathcal{Y}_1'(x)\mathcal{Y}_2(x).$$

Using (6.70) we may interpret this expression as an **ODE for \mathcal{Y}_2** :

$$\underbrace{\mathcal{Y}_1(x)}_{\text{given}} \mathcal{Y}_2'(x) - \underbrace{\mathcal{Y}_1'(x)}_{\text{given}} \mathcal{Y}_2(x) = \underbrace{e^{-\int a_1(x) dx}}_{\text{given}}, \quad (6.71)$$

where we have chosen $c = 1$. (This is w.l.o.g. since we are just looking for one solution.) We rewrite equation (6.71) as

$$\mathcal{Y}_2'(x) - \underbrace{\frac{\mathcal{Y}_1'(x)}{\mathcal{Y}_1(x)}}_{a(x)} \mathcal{Y}_2(x) = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{Y}_1(x)} e^{-\int a_1(x) dx}}_{b(x)}, \quad (6.71')$$

where we have used the notation of Section 5.4. We are merely interested in a particular solution of this equation; to be able to make use of the results of Section 5.4, see (5.47), we first note that

$$\int a(x) dx = - \int \frac{\mathcal{Y}_1'(x)}{\mathcal{Y}_1(x)} dx = - \log \mathcal{Y}_1(x) \quad \Rightarrow \quad e^{\int a(x) dx} = \frac{1}{\mathcal{Y}_1(x)}.$$

Inserting this result into (5.47) leads to

$$\mathcal{Y}_2(x) = \mathcal{Y}_1(x) \int \frac{1}{(\mathcal{Y}_1(x))^2} e^{-\int a_1(x) dx} dx. \quad (6.72)$$

By construction, $\mathcal{Y}_2(x)$ is a solution of (6.67) that is linearly independent of $\mathcal{Y}_1(x)$. (Proof: The Wronskian of $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ is given by (6.70) which is different from zero.)

Mathematica could have done it for us:

```
In[55]:= DSolve[y1[x] y2'[x] - y1'[x] y2[x] == Exp[-Integrate[a1[x], x]], y2[x], x]
% /. C[1] -> 0
```

```
Out[55]= {{y2[x] -> C[1] y1[x] + \left( \int_1^x \frac{e^{-\int_1^k a1[k][1] dk[1]}}{y1[k][1]^2} dk[1] \right) y1[x]}}
```

```
Out[56]= {{y2[x] -> \left( \int_1^x \frac{e^{-\int_1^k a1[k][1] dk[1]}}{y1[k][1]^2} dk[1] \right) y1[x]}}
```

6.6 Linear homogeneous equations with constant coefficients

A simple special case of equation (6.67) is

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (6.73)$$

where $a_0 = \text{const}$ and $a_1 = \text{const}$. This is a linear homogeneous differential equation (of second order) with constant coefficients.

Mathematica never fails with this type of equations. Let us consider a number of examples.

```
In[30]:= DSolve[y''[x] - 6 y'[x] + 5 y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[30]:= {{y[x] -> e^x C[1] + e^5 x C[2]}}
```

Hence, in this example, the set of independent solutions (Fundamentalsystem) consists of $\mathcal{Y}_1(x) = e^x$ and $\mathcal{Y}_2(x) = e^{5x}$. Each solution of the differential equation is a linear combination of these independent solutions, i.e., the general solution is $y(x) = c_1 \mathcal{Y}_1(x) + c_2 \mathcal{Y}_2(x)$, where $c_1 \in \mathbb{R}$ and $c_2 \in \mathbb{R}$.

```
In[31]:= DSolve[y''[x] + 4 y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[31]:= {{y[x] -> C[1] Cos[2 x] + C[2] Sin[2 x]}}
```

In this example, the set of independent solutions (Fundamentalsystem) is the set $\{Y_1, Y_2\} = \{\sin(2x), \cos(2x)\}$.

```
In[32]:= DSolve[y''[x] + 2 y'[x] + 2 y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[32]:= {{y[x] -> e^-x C[2] Cos[x] + e^-x C[1] Sin[x]}}
```

Here we obtain $\{Y_1, Y_2\} = \{e^{-x} \sin x, e^{-x} \cos x\}$.

```
In[33]:= DSolve[y''[x] - 2 y'[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[33]:= {{y[x] -> e^x C[1] + e^x x C[2]}}
```

In this last example, the result is $\{Y_1, Y_2\} = \{e^x, x e^x\}$.

How does Mathematica compute the independent solutions? (And what are we supposed to do if we don't have Mathematica at hand?)

Consider (6.73), i.e.,

$$z''(x) + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = 0. \quad (6.74)$$

We regard this differential equation as an equation for a *complex-valued* function $\mathbb{R} \ni x \mapsto z(x) \in \mathbb{C}$. Suppose that $z(x)$ is a (complex-valued) solution of (6.74). Then the *real part* of this solution, i.e., $y(x) = \operatorname{Re} z(x)$, is a (real-valued) solution of

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \quad (6.75)$$

i.e., of (6.73). The same is true for the *imaginary part* $\operatorname{Im} z(x)$. (The proof is straightforward — it is intimately connected with the superposition principle.) This suggests the following procedure to find a solution (or: solutions) of (6.75): (i) Find a (complex-valued) solution $z(x)$ of (6.74). (ii) Compute $\operatorname{Re} z(x)$ and $\operatorname{Im} z(x)$ to obtain (real-valued) solutions of (6.75).

Step (i). The idea to solve (6.74) is to use the **ansatz**

$$z(x) = e^{\lambda x}$$

and compute λ . Since

$$z''(x) + a_1 z'(x) + a_0 z(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x},$$

equation (6.74) leads to the quadratic equation

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (6.76)$$

Over the field \mathbb{C} , this equation always admits a solution. (But not over the field \mathbb{R} , which is why it was necessary to complexify the original differential equation.) It is necessary to distinguish two cases:

- ❶ Equation (6.76) has only one solution λ (which is automatically in \mathbb{R}). (This case occurs when the discriminant of (6.76) is zero.)
- ❷ Equation (6.76) has two solutions λ_1, λ_2 in \mathbb{C} . (This case occurs when the discriminant of (6.76) is non-zero.)

Let us consider the simpler case ❷ first; we will analyze case ❶ separately. We have

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$

and we therefore obtain two solutions of (6.74):

$$\mathcal{Z}_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \mathcal{Z}_2(x) = e^{\lambda_2 x}. \quad (6.77)$$

In general, these solutions are complex-valued.

Step (ii). It remains to compute the real and imaginary part of the complex-valued solutions to obtain (real-valued) solutions of (6.75).

$$\operatorname{Re} \mathcal{Z}_1 = \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x}, \quad \operatorname{Im} \mathcal{Z}_1 = \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x}, \quad \operatorname{Re} \mathcal{Z}_2 = \operatorname{Re} e^{\lambda_2 x}, \quad \operatorname{Im} \mathcal{Z}_2 = \operatorname{Im} e^{\lambda_2 x}.$$

To proceed, let us write

$$\lambda_1 =: u_1 + iv, \quad \lambda_2 =: u_2 - iv. \quad (6.78)$$

(Either, $u_1 = u_2$ and $v \neq 0$, or $u_1 \neq u_2$ and $v = 0$.) Then

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x} &= \operatorname{Re} (e^{u_1 x} e^{ivx}) = \operatorname{Re} [e^{u_1 x} (\cos(vx) + i \sin(vx))] = e^{u_1 x} \cos(vx), \\ \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x} &= \operatorname{Im} (e^{u_1 x} e^{ivx}) = \operatorname{Im} [e^{u_1 x} (\cos(vx) + i \sin(vx))] = e^{u_1 x} \sin(vx), \\ \operatorname{Re} e^{\lambda_2 x} &= \operatorname{Re} (e^{u_2 x} e^{-ivx}) = \operatorname{Re} [e^{u_2 x} (\cos(vx) - i \sin(vx))] = e^{u_2 x} \cos(vx), \\ \operatorname{Im} e^{\lambda_2 x} &= \operatorname{Im} (e^{u_2 x} e^{-ivx}) = \operatorname{Im} [e^{u_2 x} (\cos(vx) - i \sin(vx))] = -e^{u_2 x} \sin(vx). \end{aligned}$$

We have thus found real-valued solutions of (6.73). At least two of these solutions are linearly independent (which follows from the properties of u_1 , u_2 , and v); choosing two such solutions we have found a *set of independent solutions* (*Fundamentalsystem*) $\{\mathcal{Y}_1(x), \mathcal{Y}_2(x)\}$.

Summarizing, in case **2**, a set of independent solutions (Fundamentalsystem) is given by

$$\{\mathcal{Y}_1(x), \mathcal{Y}_2(x)\} \subset \{e^{u_1 x} \cos(vx), e^{u_1 x} \sin(vx), e^{u_2 x} \cos(vx), e^{u_2 x} \sin(vx)\}.$$

EXAMPLE

Consider the equation

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

and its complexified counterpart

$$z'' + 2z' + 2z = 0.$$

The ansatz $z = e^{\lambda x}$ leads to

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

which admits the solutions

$$\lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i.$$

(Hence $u_1 = u_2 = -1$ and $v = 1$ in this example.) The real and imaginary part of the solution $\mathcal{Z}_1 = e^{\lambda_1 x}$ are easily computed:

$$\operatorname{Re} \mathcal{Z}_1 = \operatorname{Re} e^{\lambda_1 x} = \operatorname{Re}(e^{-x} e^{ix}) = e^{-x} \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x) = e^{-x} \cos x,$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{Z}_1 = \operatorname{Im} e^{\lambda_1 x} = \operatorname{Im}(e^{-x} e^{ix}) = e^{-x} \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x) = e^{-x} \sin x.$$

Using \mathcal{Z}_2 leads essentially to the same result. We have thus found a set of independent solutions,

$$\mathcal{Y}_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad \mathcal{Y}_2(x) = e^{-x} \sin x.$$

This is exactly the result **Mathematica** provided us with at the beginning of this section.

To conclude this section it remains to discuss case **1**. What happens if we discover in step (i) that the quadratic equation (6.76) has only one solution λ ? Note that λ is automatically in \mathbb{R} , since

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Instead of (6.77) we obtain only one solution

$$\mathcal{Z}_1 = e^{\lambda x}. \tag{6.79}$$

Since $\lambda \in \mathbb{R}$, this solution is automatically real-valued. Therefore we have derived at least one solution of equation (6.75):

$$\mathcal{Y}_1 = e^{\lambda x}.$$

However, the method we use (i.e., the ansatz) fails to uncover a second solution.

To get a set of independent solutions $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ we resort to a different method: Since one solution, \mathcal{Y}_1 , is known, we can reduce the linear homogeneous differential (6.75) to an equation of first order, see Section 6.5; an second solution, \mathcal{Y}_2 , is then determined by (6.72).

Inserting $\mathcal{Y}_1 = e^{\lambda x} = \exp\left(-\frac{a_1}{2}x\right)$ into (6.72) we obtain

$$\mathcal{Y}_2(x) = \mathcal{Y}_1(x) \int \frac{1}{(\mathcal{Y}_1(x))^2} e^{-\int a_1 dx} dx = e^{\lambda x} \int e^{a_1 x} e^{-a_1 x} dx = x e^{\lambda x}.$$

Therefore, in case **1**, the set of independent solutions (Fundamentalsystem) we were looking for consists of

$$\mathcal{Y}_1(x) = e^{\lambda x}, \quad \mathcal{Y}_2(x) = x e^{\lambda x}. \quad (6.80)$$

EXAMPLE

Consider the equation

$$y'' - 2y' + y = 0$$

and its complexified counterpart

$$z'' - 2z' + z = 0.$$

The ansatz $z = e^{\lambda x}$ leads to

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

which admits the unique solution

$$\lambda = 1.$$

The associated solution is real-valued. Accordingly, we obtain one solution of the equation from the ansatz:

$$\mathcal{Y}_1(x) = e^x.$$

To obtain a second, linearly independent solution, we recall (6.80):

$$\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\} = \{e^x, xe^x\}.$$

This coincides with the result **Mathematica** gave us at the beginning of this section.

6.7 Inhomogeneous equations

Generalizing (6.67) we consider a linear and *inhomogeneous* differential equation of 2nd order,

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (6.81)$$

where $a_0(x)$, $a_1(x)$, and $b(x)$ are given functions. (If $a_0(x)$, $a_1(x)$, and $b(x)$ are at least continuous, then the requirements of the Picard-Lindelöf theorem are met.)

The homogeneous equation associated with (6.81) is obviously

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (6.81_h)$$

We may ‘copy and paste’ the main statement of Section 5.4 (actually, ‘copy and

paste' does not work, because we must translate from German to English).

The general solution of the linear (inhomogeneous) differential equation (6.81) is the sum of the general solution of the associated homogeneous equation (6.81_h) and one particular solution.

$$y(x) = \underbrace{c_1 \mathcal{Y}_1(x) + c_2 \mathcal{Y}_2(x)}_{y_h} + y_p \quad (6.82)$$

In (6.82), c_1 and c_2 are arbitrary constants, and $\{\mathcal{Y}_1(x), \mathcal{Y}_2(x)\}$ is a set of independent solutions (Fundamentalsystem) of the homogeneous equation (6.81_h); hence, $c_1 \mathcal{Y}_1(x) + c_2 \mathcal{Y}_2(x)$ is the general solution of the homogeneous equation (6.81_h). The function y_p denotes a particular solution (which is yet to be specified).

Let us prove (6.82). Assume that $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are solutions of (6.81). Consider $y_1 - y_2$; its second derivative is

$$(y_1 - y_2)'' = -a_1 y_1' - a_0 y_1 + b - (-a_1 y_2' - a_0 y_2 + b) = -a_1 (y_1 - y_2)' - a_0 (y_1 - y_2).$$

Therefore, $y_1 - y_2$ satisfies the homogeneous equation (6.81_h) and is thus represented by a unique linear combination of \mathcal{Y}_1 and \mathcal{Y}_2 , see Section 6.5. Accordingly, if y_p is a particular solution of (6.81), every other solution y differs from y_p by a solution of the homogeneous equation; (6.82) is established.

Summarizing, solving the inhomogeneous equation (6.81) amounts to (i) solving the homogeneous equation (6.81_h) and (ii) finding one particular solution of (6.81).

Suppose we have successfully completed point (i), i.e., suppose that we have found a set $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ of independent solutions of (6.81_h). Let us address point (ii).

Of course, **Mathematica** knows what to do. Compare this example with the general considerations of (6.82).

```
In[4]:= DSolve[y''[x] + 2 y'[x] + 2 y[x] = x^2 Sin[x], y[x], x];
Collect[%, {C[1], C[2]}, Simplify]

Out[5]= {{y[x] -> e^{-x} C[2] Cos[x] + e^{-x} C[1] Sin[x] + \frac{1}{125} (-2 (68 - 70 x + 25 x^2) Cos[x] + (-2 - 20 x + 25 x^2) Sin[x])}}
```

Mathematica does not give up easily on linear ODEs; it can handle difficult tasks; `erfi` is (a modification of) the error function.

In[28]:= `DSolve[y''[x] + x y'[x] + y[x] == E^x, y[x], x]`

Out[28]:= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} c[2] + e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} c[1] \left(-\operatorname{Erfi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \operatorname{Erfi}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e \left(-\operatorname{Erfi}[\sqrt{2}] + \operatorname{Erfi}\left[\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right] \right) \right) \right\} \right\}$

At least, we would like to understand (some of) the principles Mathematica uses.

Let us discuss the principle of the *variation of constants*. This is a method that produces a particular solution of the inhomogeneous equation (6.81), provided that we have found a set $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ of independent solutions of (6.81_h).

To find a particular solution of (6.81) we make the ansatz

$$y_p = k_1(x)\mathcal{Y}_1(x) + k_2(x)\mathcal{Y}_2(x). \quad (6.83)$$

The ansatz resembles the usual representation of the general solution of the homogeneous equation (6.81_h), where the constants c_1, c_2 have been replaced by functions $k_1(x), k_2(x)$ (that are to be determined). Insertion of this ansatz into (6.81) leads to

$$\begin{aligned} y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p &= \\ &= \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 + k_1 \mathcal{Y}_1' + k_2 \mathcal{Y}_2' \right)' + \\ &\quad + a_1 \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 + k_1 \mathcal{Y}_1' + k_2 \mathcal{Y}_2' \right) + a_0 \left(k_1 \mathcal{Y}_1 + k_2 \mathcal{Y}_2 \right) = \\ &= \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 \right)' + \left(k_1' \mathcal{Y}_1' + k_2' \mathcal{Y}_2' + \cancel{k_1 \mathcal{Y}_1''} + \cancel{k_2 \mathcal{Y}_2''} \right) + \\ &\quad + a_1 \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 + \cancel{k_1 \mathcal{Y}_1'} + \cancel{k_2 \mathcal{Y}_2'} \right) + a_0 \left(\cancel{k_1 \mathcal{Y}_1} + \cancel{k_2 \mathcal{Y}_2} \right) = \\ &= \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 \right)' + a_1 \left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 \right) + \left(k_1' \mathcal{Y}_1' + k_2' \mathcal{Y}_2' \right) \stackrel{!}{=} b \end{aligned}$$

We choose a pair of function, f and g , that satisfy $f' + a_1 f + g = b$. The simplest choice is $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ and $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$. (In some cases, different choices might be better; but let us not bother here.) Therefore, the equation becomes

$$y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p = \underbrace{\left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 \right)'}_{f'} + a_1 \underbrace{\left(k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 \right)}_f + \underbrace{\left(k_1' \mathcal{Y}_1' + k_2' \mathcal{Y}_2' \right)}_g = b,$$

which leads to a system of ODEs for k_1 and k_2 ,

$$\begin{aligned} k_1' \mathcal{Y}_1 + k_2' \mathcal{Y}_2 &= f, \\ k_1' \mathcal{Y}_1' + k_2' \mathcal{Y}_2' &= g. \end{aligned}$$

We write this system in the form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}'_1 & \mathcal{Y}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} .$$

In order to obtain a system of ODEs for k_1 and k_2 we must solve (algebraically) for k'_1 and k'_2 . This is indeed possible since the matrix on the l.h. side is invertible; this is due to the fact that the determinant of the matrix is the Wronskian, i.e.,

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}'_1 & \mathcal{Y}'_2 \end{pmatrix} = W ,$$

which is non-zero, since $\{\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2\}$ are linearly independent. We therefore obtain

$$\begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} f\mathcal{Y}'_2 - g\mathcal{Y}_2 \\ -f\mathcal{Y}'_1 + g\mathcal{Y}_1 \end{pmatrix} ,$$

which can be integrated straightforwardly to obtain $k_1(x)$ and $k_2(x)$:

$$k_1(x) = \int \frac{1}{W(x)} (f(x)\mathcal{Y}'_2(x) - g(x)\mathcal{Y}_2(x)) dx , \quad (6.84a)$$

$$k_2(x) = \int \frac{1}{W(x)} (-f(x)\mathcal{Y}'_1(x) + g(x)\mathcal{Y}_1(x)) dx . \quad (6.84b)$$

The simple choice $f(x) \equiv 0$ and $g(x) = b(x)$ results in

$$k_1(x) = \int \frac{1}{W(x)} (-b(x)\mathcal{Y}_2(x)) dx , \quad (6.85a)$$

$$k_2(x) = \int \frac{1}{W(x)} (b(x)\mathcal{Y}_1(x)) dx . \quad (6.85b)$$

Inserting this solution for (k_1, k_2) into the ansatz (6.83) we have obtained a particular solution of the inhomogeneous equation (6.81):

$$y_p = -\left(\int \frac{1}{W(x)} b(x)\mathcal{Y}_2(x) dx\right)\mathcal{Y}_1(x) + \left(\int \frac{1}{W(x)} b(x)\mathcal{Y}_1(x) dx\right)\mathcal{Y}_2(x) . \quad (6.86)$$

EXAMPLE

Let us consider a simple example,

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{\alpha x}, \quad (6.87)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. A set of independent solutions of the associated homogeneous equation $y'' + y' - 2y = 0$ is

$$\{\mathcal{Y}_1(x), \mathcal{Y}_2(x)\} = \{e^x, e^{-2x}\};$$

we simply apply the methods of Section 6.6. Since we are equipped with a set of independent solutions we can use the method of the variation of the constants to obtain a particular solution of (6.87). To be able to apply (6.85) we need the Wronskian.

$$W = \begin{vmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}'_1 & \mathcal{Y}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}.$$

Now, (6.85) results in

$$k_1(x) = \frac{1}{3} \int e^x e^{\alpha x} e^{-2x} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha - 1} e^{(\alpha-1)x},$$

$$k_2(x) = -\frac{1}{3} \int e^x e^{\alpha x} e^x dx = -\frac{1}{3} \frac{1}{2 + \alpha} e^{(2+\alpha)x},$$

when we assume that $\alpha \neq 1$ and $\alpha \neq -2$. (We will treat the cases $\alpha = 1$ and $\alpha = -2$ separately.) Inserting this result into (6.83) yields

$$y_p(x) = k_1 \mathcal{Y}_1 + k_2 \mathcal{Y}_2 = \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha - 1} e^{(\alpha-1)x} e^x - \frac{1}{3} \frac{1}{2 + \alpha} e^{(2+\alpha)x} e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{2 + \alpha} \right) e^{\alpha x} = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)} e^{\alpha x};$$

hence we have found a particular solution of (6.87). Accordingly, the general solution of (6.87) (with $\alpha \notin \{-2, 1\}$) is

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)} e^{\alpha x} + c_1 e^x + c_2 e^{-2x},$$

where c_1 and c_2 in \mathbb{R} .

EXAMPLE

We consider again the previous example, i.e.,

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{\alpha x}, \quad (6.87')$$

where α is assumed to be in $\{-2, 1\}$. Let $\alpha = 1$. We proceed as before and obtain

$$k_1(x) = \frac{1}{3} \int e^x e^{\alpha x} e^{-2x} dx = \frac{1}{3} \int dx = \frac{x}{3},$$

$$k_2(x) = -\frac{1}{3} \int e^x e^{\alpha x} e^x dx = -\frac{1}{3} \frac{1}{2 + \alpha} e^{(2+\alpha)x} = -\frac{1}{9} e^{3x}.$$

Inserting this result into (6.83) yields

$$y_p(x) = k_1 \mathcal{Y}_1 + k_2 \mathcal{Y}_2 = \frac{x}{3} e^x - \frac{1}{9} e^x = \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) e^x.$$

hence we have found a particular solution of (6.87). Accordingly, the general solution of (6.87) (with $\alpha = 1$) is

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-2x},$$

where c_1 and c_2 in \mathbb{R} . Note that this can be written as

$$y = y_p + y_h = \frac{x}{3} e^x + \tilde{c}_1 e^x + c_2 e^{-2x},$$

where \tilde{c}_1 and c_2 in \mathbb{R} . The case $\alpha = -2$ is left as an exercise.

The examples tell us that something exceptional occurs when the inhomogeneity takes the form of a solution of the homogeneous equation. This is a so-called *resonance phenomenon*, which will be discussed in more generality below.

7 Linear systems of autonomous differential equations

7.1 Normal forms of real operators

Consider a (real or complex) $(n \times n)$ matrix A . The matrix A is diagonalizable if and only if there exists a ‘switch matrix’ S such that

$$A = SDS^{-1}, \quad (7.1a)$$

where D is a diagonal matrix. In other words, diagonalizability means that the matrix A can be brought to diagonal form by a similarity transformation.

Recall that two matrices A_1 and A_2 are called similar, $A_1 \approx A_2$, if there exists a non-singular matrix T such that $A_1 = TA_2T^{-1}$. The involved transformation is a so-called similarity transformation.

The diagonal matrix D in (7.1a) necessarily coincides with the eigenvalue matrix, i.e.,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (7.1b)$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ are the eigenvalues of A (which need not be different).

The diagonal matrix D is called the **normal form** of the diagonalizable matrix A . In general, the normal form of a (not necessarily diagonalizable) matrix is a matrix with a simplified canonical structure that is obtained from the original matrix by a similarity transformation.

For simplicity we restrict ourselves to real (2×2) matrices in the following.

In the case of real (2×2) matrices there exist three possible normal forms.

- ① Let A be diagonalizable. The normal form of A is a diagonal matrix D , the eigenvalue matrix, see (7.1).

- ② Suppose that A is not diagonalizable. There are two possible scenarios: Either A has at least one eigenvalue (whose geometric multiplicity is only one) or A does not have any eigenvalue at all. Let us assume the latter.

We may regard A as an operator acting on the vector space \mathbb{C}^2 instead of \mathbb{R}^2 . Using this complexified viewpoint, A possesses two complex eigenvalues (which must be complex conjugates): $\lambda = a - bi$, $\bar{\lambda} = a + bi$. By assumption, the eigenvalues are truly complex, i.e., $b \neq 0$. Let v denote the (complex) eigenvector associated with the eigenvalue λ , i.e.,

$$Av = \lambda v, \quad (7.2)$$

and consider the real and imaginary part of v , i.e., $v = u + iw$ ($u = \operatorname{Re} v \neq \vec{0}$, $w = \operatorname{Im} v \neq \vec{0}$). It is straightforward to see that u and w are linearly independent vectors. (Proof: Assume the contrary, i.e., the existence of $\kappa \in \mathbb{C}$ such that $u = \kappa w$. Then $Av = A(1 + \kappa)w = \lambda(1 + \kappa)w$ and hence $Aw = \lambda w$. Because A is real and w is real, Aw is real. However, the r.h.s. is truly complex, since $\operatorname{Im} \lambda = -b \neq 0$. We have obtained a contradiction.) The eigenvector equation (7.2) implies

$$\underbrace{A(u + iw)}_{Au + iAw} = \lambda(u + iw) = (a - ib)(u + iw) = au + bw + i(-bu + aw).$$

Equating the real parts and the imaginary parts yields

$$Au = au + bw, \quad Aw = -bu + aw.$$

Therefore, w.r.t. the basis $\{u, w\}$ the map A takes the form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

In other words we have shown that there exists a similarity transformation such that

$$A = SJS^{-1} \quad \text{with} \quad J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

The matrix J is called the normal form of A . Note that the columns of the switch matrix S are the basis vectors u and w .

The matrix J has a simple interpretation in geometric terms. Obviously, we have

$$J = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix},$$

hence, up to a factor, J is an orthogonal matrix. More specifically, by setting $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ and $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ we obtain

$$J = s \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

i.e., J is proportional to rotation matrix (where the rotation angle φ is different from zero or π ; otherwise J would be diagonal).

- ③ Finally, suppose that A is not diagonalizable and that there exists one eigenvalue λ of A (whose geometric multiplicity is only one).

Let v be an eigenvector associated with λ , i.e., $Av = \lambda v$. Consider a linearly independent vector w . Trivially, there exist constants a and b such that

$$Aw = av + bw.$$

In particular, $a \neq 0$; otherwise, w would be an eigenvector of A that is linearly independent from v , which is a contradiction to our assumption (that A is not diagonalizable). W.r.t. the basis $\{v, w\}$ the map A takes the form

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of this matrix are λ and b ; however, by assumption, there exists merely one eigenvalue: λ . We conclude that $b = \lambda$, i.e., we get

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Finally, we use the rescaled vector $\tilde{v} = av$ instead of v as a basis vector; w.r.t. the basis $\{\tilde{v}, w\}$ the map A takes the form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

which is the so-called Jordan normal form.

The classification of normal forms for (2×2) matrices is the basis for the normal forms of higher dimensional matrices. In general, there exists a similarity transformation such that an $(n \times n)$ matrix is similar to a block diagonal matrix, where the entries are either numbers or (2×2) boxes of the type (7.3) or (7.4).

7.2 The matrix exponential

Let A be a (real) $(n \times n)$ matrix. It is straightforward to define e^A when we use the power series of the exponential function. We define

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \mathbf{1} + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots \quad (7.5)$$

This definition makes sense, because this infinite series convergence for all A . To see this, let $a = \max_{i,j} |A_{ij}|$, and let

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & a & \dots & a \\ a & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & a \end{pmatrix}.$$

By construction we have $|A| \leq \mathcal{A}$, where the inequality is meant componentwise; furthermore, $|A^k| \leq \mathcal{A}^k$ for all $k \in \mathbb{N}$, hence e^A is bounded componentwise (above and below) by $e^{\mathcal{A}}$. It is straightforward to show that

$$\mathcal{A}^k = n^{k-1} \begin{pmatrix} a^k & a^k & \dots & a^k \\ a^k & a^k & \dots & a^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k & a^k & \dots & a^k \end{pmatrix}.$$

Therefore, each element of $e^{\mathcal{A}}$ is given by

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} a^k = n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (na)^k = n^{-1} e^{na} < \infty.$$

Since $e^{\mathcal{A}}$ exists, e^A exists as well and the definition (7.5) makes sense for all A .

So, given a matrix A , how do we compute e^A ? (Certainly not by doing the infinite sum in (7.5).) The key to computing e^A is the normal form of A .

For simplicity let us restrict ourselves to (2×2) matrices again.

Let J denote the normal form of A , i.e., $A = SJS^{-1}$, where J is one of the normal

forms of Section 7.1. Then

$$\begin{aligned}
 e^A &= \mathbf{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots \\
 &= SS^{-1} + SJS^{-1} + \frac{1}{2}(SJS^{-1}SJS^{-1}) + \frac{1}{6}(SJS^{-1}SJS^{-1}SJS^{-1}) + \dots \\
 &= SS^{-1} + SJS^{-1} + \frac{1}{2}(SJJS^{-1}) + \frac{1}{6}(SJJJJS^{-1}) + \dots \\
 &= S\left(\mathbf{1} + J + \frac{1}{2}J^2 + \frac{1}{6}J^3 + \dots\right)S^{-1} \\
 &= Se^J S^{-1}.
 \end{aligned}$$

Therefore, to compute e^A it is sufficient to compute the exponential of the normal form.

- ① Let A be diagonalizable. The normal form of A is a diagonal matrix, i.e., $J = D$, where D is the eigenvalue matrix, see (7.1). For e^J we obtain

$$e^J = e^D = \mathbf{1} + \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{1}{2} \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2) + \dots = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}) \quad (7.6)$$

and, accordingly,

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (7.7)$$

where S is the switch matrix that contains the two eigenvectors of A as columns.

- ② Suppose that A is not diagonalizable and that A does not have any eigenvalue. Then the normal form of A is given by (7.3).

When we regard A as a complex matrix, we have $A = TDT^{-1}$, where $D = \text{diag}(a - bi, a + bi)$, and where T contains the complex eigenvectors as columns. Accordingly,

$$e^A = Te^DT^{-1},$$

where

$$e^D = \text{diag}(e^{a-bi}, e^{a+bi}) = e^a \text{diag}(\cos b - i \sin b, \cos b + i \sin b).$$

Let us write $\tilde{a} = e^a \cos b$ and $\tilde{b} = e^a \sin b$; then $e^D = \text{diag}(\tilde{a} - i\tilde{b}, \tilde{a} + i\tilde{b})$. In Section (7.1) we have transformed a matrix of this type to a similar real matrix by using the real/imaginary part of the (complex) eigenvectors as a basis. Proceeding in complete analogy we obtain that e^A is related by a similarity transformation matrix S to

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & -\tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix},$$

i.e.,

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (7.8)$$

Recall from Section (7.1) that the columns of S are the real/imaginary part of the (complex) eigenvectors of A (or e^A , respectively).

- ③ Finally, suppose that A is not diagonalizable and that there exists one eigenvalue λ of A (whose geometric multiplicity is only one). Then the normal form of A is given by (7.4).

To compute e^J we first note that $J - \lambda \mathbf{1}$ is a nilpotent matrix, which means that its square vanishes,

$$(J - \lambda \mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Accordingly, we obtain

$$\begin{aligned} e^J &= e^{J - \lambda \mathbf{1} + \lambda \mathbf{1}} \stackrel{(*)}{=} e^{J - \lambda \mathbf{1}} e^{\lambda \mathbf{1}} & (*) \\ &= \left(\mathbf{1} + (J - \lambda \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \underbrace{(J - \lambda \mathbf{1})^2}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} \right) e^{\lambda \mathbf{1}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hence, if $A = SJS^{-1}$, where J is given by the Jordan normal form (7.4), then

$$e^A = S \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (7.9)$$

For future purposes we note that

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1}; \quad (7.10)$$

the computation is completely analogous.

It is important to emphasize that the matrix exponential violates several rules that we are accustomed to do from the exponential function of numbers. Most importantly, in general

$$e^{A+B} \neq e^A e^B. \quad (7.11)$$

To see this we simply use the definition (7.5). From

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \mathbb{1} + A + B + \frac{1}{2}(A+B)^2 + \dots \\ &= \mathbb{1} + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots \\ e^A e^B &= (\mathbb{1} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots)(\mathbb{1} + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots) \\ &= \mathbb{1} + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots \end{aligned}$$

we see that the two expressions are in general not equal. However, we note that the vanishing of the commutator, $[A, B] = 0$ (i.e., $AB = BA$), resolves the problem,

$$AB = BA \quad \Rightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B. \quad (7.12)$$

Note that we have already used this property of the matrix exponential, namely in (*) on p. 114.

Similarly, consider a matrix-valued function $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t)$. If the commutator of A and \dot{A} vanishes, the chain rule holds, i.e.,

$$A\dot{A} = \dot{A}A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} e^{A(t)} = \dot{A}(t) e^{A(t)}. \quad (7.13)$$

A particular consequence is that

$$\frac{d}{dt} e^{Bt} = B e^{Bt} \quad (7.14)$$

for all matrices B .

7.3 Linear systems of ODEs with constant coefficients

We consider the system of differential equations

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (7.15)$$

where A is a constant (real) matrix. The function $t \mapsto x(t)$ is vector-valued, i.e.,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

We claim that the solution of this system of ODEs is obtained in complete analogy with scalar differential equations: There is a constant vector \hat{x} such that the solution of (7.15) is given by

$$x(t) = e^{At} \hat{x}. \quad (7.17)$$

The proof is straightforward, because

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} e^{At} \hat{x} = A e^{At} \hat{x} = Ax(t).$$

To see that (7.17) is the general solution we note that $x(0) = \hat{x}$; since \hat{x} is arbitrary we thus obtain a solution for every possible IVP. The Picard-Lindelöf theorem then guarantees that this solution we have found via (7.17) is the only solution.

To compute e^{At} we can make use of the considerations of Section 7.2. Alternatively, we use the normal form of A in (7.15): Assume that the normal form of A is J , i.e., there exists S such that $A = SJS^{-1}$. Then (7.15) takes the form

$$\dot{x}(t) = SJS^{-1}x(t),$$

which we can multiply by S^{-1} (from the left) to obtain

$$S^{-1}\dot{x}(t) = JS^{-1}x(t).$$

Let us define

$$y(t) := S^{-1}x(t).$$

Expressed in $y(t)$ the system of differential equations reads

$$\dot{y}(t) = Jy(t). \quad (7.18)$$

The general solution of this system is

$$y(t) = e^{Jt} \hat{y}. \quad (7.19)$$

To reconstruct the general solution $x(t)$ of (7.15) we use the switch matrix S , i.e.,

$$x(t) = Sy(t). \quad (7.20)$$

For simplicity let us restrict ourselves to the case of two-dimensional systems, i.e., the function $x(t)$ is a function $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ and the matrix A is a (2×2) matrix.

Let us consider the various cases of normal forms.

- ① Let A be diagonalizable. Then $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ and e^J is given by (7.6). In complete analogy we obtain

$$e^{Jt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) \quad (7.21)$$

and the solution of (7.18) reads

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 e^{\lambda_1 t} \\ \dot{y}_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

where \dot{y}_1 and \dot{y}_2 are constants. In fact, the result (7.22) is immediate from the fact that the equations in (7.18) decouple in the case ①. Namely,

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad (7.23)$$

since $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

- ② Suppose that A is not diagonalizable and that A does not have any eigenvalue. In this case, e^J is given by

$$\begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

see (7.8). The result for e^{Jt} is obtained by formally replacing a by at and b by bt in (7.24), i.e.,

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) & -e^{at} \sin(bt) \\ e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Accordingly,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \cos(bt) + \dot{y}_2 \sin(bt) \\ -\dot{y}_1 \sin(bt) + \dot{y}_2 \cos(bt) \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

- ③ Finally, suppose that A is not diagonalizable and that there exists one eigenvalue λ of A (whose geometric multiplicity is only one). Then the normal form of A is given by (7.4).

Since e^{Jt} is given by (7.10), the solution of (7.18) reads

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 e^{\lambda t} + \dot{y}_2 t e^{\lambda t} \\ \dot{y}_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Again, this result is alternatively obtained by integrating the systems of differential equations (7.18) directly.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2 = \lambda y_1 + \dot{y}_2 e^{\lambda t} \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \overbrace{\dot{y}_2}^{\uparrow} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Therefore,

$$y_1 = \dot{y}_1 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int e^{-\lambda t} \dot{y}_2 e^{\lambda t} dt = \dot{y}_1 e^{\lambda t} + t e^{\lambda t} \dot{y}_2$$

by (5.48), i.e., we reproduce (7.27).

Consider the system of differential equations (7.15), i.e.,

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (7.28)$$

Evidently, $x(t) \equiv \vec{o}$ is a solution (7.28); it is a stationary solution — a **fixed point**.

Let us assume that A is non-singular, i.e., $\det A \neq 0$. (Recall that $\det A = 0$ if and only if $\lambda = 0$ is an eigenvalue of A .) To obtain the stationary solutions (fixed points) we set the r.h. side of (7.28) to zero, i.e., $Ax = \vec{o}$. Since the inverse of A exists, we find that $x = \vec{o}$ is the only fixed point of (7.28).

We ask the question of whether the fixed point $x_f = \vec{o}$ is (asymptotically) **stable**. This is the case when there exists a neighborhood \mathcal{U} of the fixed point such that each solution $x(t)$ of the system (7.28) with $x(0) = \hat{x} \in \mathcal{U}$ converges to x_f as $t \rightarrow \infty$. (Conversely, a fixed point x_f is called (asymptotically) **unstable**, if $x(t) \rightarrow x_f$ as $t \rightarrow -\infty$ for all solutions $x(t)$ with $x(0) = \hat{x} \in \mathcal{U}$.)

The definition for general autonomous systems of ODEs is similar; in that case, a prerequisite of asymptotic stability is Ljapunov stability. (Ljapunov stability means that for every neighborhood \mathcal{V} of x_f there exists a neighborhood \mathcal{U} of x_f such that every solution with $x(0) = \hat{x} \in \mathcal{U}$ remains in \mathcal{V} for all $t \geq 0$.)

Consider the system (7.28). Let λ_1 and λ_2 denote the (possibly complex) eigenvalues of A (i.e., we regard A as a complex matrix). Note that $\lambda_1 = \lambda_2$ is permitted. Assume that $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ and $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$. Then the fixed point $x_f = \vec{o}$ is a stable fixed point. (Conversely, assume that $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ and $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$. Then the fixed point $x_f = \vec{o}$ is an unstable fixed point.)

To prove the claim we make use of (7.22), (7.26), and (7.27). In case ①, A is diagonalizable (over the field \mathbb{R}) and $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ by assumption. Then (7.22) immediately leads to the claim. In case ②, A has the complex eigenvalues $\lambda_1 = a - bi$ and $\lambda_2 = a + bi$, where $a < 0$ by assumption. Therefore, (7.26) yields the claim. In case ③, there is only one eigenvalue $\lambda < 0$; (7.27) leads to the claimed behavior of solutions.

A stable fixed point can be called a sink; an unstable fixed point a source. Finally, consider the special case of A being diagonalizable (i.e., case ①), where $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 < 0$. Then the fixed point x_f is called a saddle. It is very (very!) useful to study the phase portraits of the flow induced by the system (7.28) in the various cases; we refer to the lecture course.