Übungen zu M1 WS 2007/2008

1. Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{R}$ und in welchem Sinn?
   a) $\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \,\text{stetig}\}$
   b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$
   c) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \,\text{(streng) monoton steigend}\}$

2. Dasselbe für
   d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 = 0\}$
   e) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 |\ x_2 = 1\}$
   f) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} |\ f(x) = f(x+a)\}$

3. Seien $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ und $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ zwei Matrizen. Beweise zumindest für $n = 2$ und $n = 3$, dass $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ ist.

4. Seine **u, v** linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (eventuell: $\mathbb{R}^n$). Was ist der Rang der linearen Abbildungen $\mathbf{A}$ mit der Darstellung
   a) $a_{ij} = u_i v_j + v_i u_j$, b) $a_{ij} = u_i v_j - v_i u_j$, c) $a_{ij} = u_i u_j$,
   d) $a_{ij} = u_i u_j + 2u_i v_j$, e) $a_{ij} = u_i u_j - v_i v_j$, f) $a_{ij} = u_i u_j + v_i v_j$
   Hinweis: Ergänze u_i, v_i zu einer Basis.

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{A}(z) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gleich
   $$\mathbf{A}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix}$$
   Beweise: $\mathbf{A}(z)\mathbf{A}(z') = \mathbf{A}(zz')$.

6. Sei $\mathbf{A}$ die lineare Abbildung des $\mathbb{R}^5$
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
   Berechne $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^5$.

7. Benutze die Formel $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, um folgendes zu zeigen: Wenn $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{E}$, dann ist $[\mathbf{A}, \mathbf{B}^k] = k\mathbf{B}^{k-1}$. Bemerkung: Solche Abbildungen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ kann es im Endlichdimensionalen eigentlich nicht geben (Beweis: betrachte die Spur von rechter und linker Seite).

8. Gibt es lineare Abbildungen $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$: a) im $\mathbb{R}^2$ (versuche $a_{11} = a_{22} = 0$), b) im $\mathbb{R}^4$, c) im $\mathbb{R}^3$ (nimm die Determinante von $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{E}$) ?

9. Berechne die Determinante einer allgemeinen 2×2 - und 3×3 - Matrix unter Verwendung der Definition (2.14) aus der Vorlesung.

10. Beweise: Die Spur einer 2×2 - Matrix ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte. (Bemerkung: dies gilt auch für $n \times n$ - Matrizen.) Hinweis: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.

11. Zeige: die reelle 2×2 - Matrix
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
hat nur reelle Eigenwerte $\Longleftrightarrow$ $(a-d)^2 + 4bc = (\mathrm{tr}(\mathbf{A}))^2 - 4\det(\mathbf{A}) \geq 0$.

12. Die Matrix im vorhergehenden Beispiel erfülle $(a-d)^2 = -4bc \neq 0$. Zeige, dass dann $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist.

13. Sei $(\vec{a}, \vec{b})$ die zu den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gehörige 2×2 - Matrix. Verifiziere, dass
$$\det(\vec{a}, \vec{b})\det(\vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\,\vec{d}) - (\vec{a}\,\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$
und dies dasselbe ist wie
$$\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}$$

14. Sei $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\sigma)$ eine 1-parametrige Familie nichtsingulärer linearer Abbildungen $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Verifiziere, dass
$$(\det(\mathbf{A}))' = \det(\mathbf{A})\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}')\ ,$$
wobei $'$ für die Ableitung nach σ steht. (Bemerkung: dies gilt für allgemeines n.)

15. Wende das Ergebnis des vorhergehenden Beispiels auf $\mathbf{A}(\sigma) = e^{\sigma\mathbf{B}}$ an, um zu zeigen, dass
$$\det(e^{\mathbf{B}}) = e^{\mathrm{tr}\mathbf{B}}$$

16. Finde Ähnlichkeitstransformationen $\mathbf{T}$, die die Matrizen
$$\text{a)}\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
diagonalisieren.

17. Gib, unter Verwendung von (2.64), Formeln an für
a) $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}$, *b)* $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}$, *c)* $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

18. Sei $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und die lineare Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \sum_{j,k} a_j \epsilon_{jik} \mathbf{e}_k$$

Berechne $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$, $\det(\mathbf{A})$.

19. Berechne - und beschreibe geometrisch - $ker(\mathbf{A})$ und $im(\mathbf{A})$ für die Abbildung $\mathbf{A}$ aus dem vorhergehenden Beispiel.

20. Sei $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ gegeben durch

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$$

Berechne $(\boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}_1)\mathbf{\Psi}$, $(\boldsymbol{\sigma}_2 \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}_2)\mathbf{\Psi}$ und $(\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \boldsymbol{\sigma}_3)\mathbf{\Psi}$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_i$ die in **(2.2.6)** definierten Paulimatrizen sind.

21. Seien $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ ein orthonormales 2-Bein im unitären Vektorraum $\mathbb{V}$. Der Operator $\mathbf{A}$ habe die Matrixdarstellung $a_{ij} = e_i \bar{f}_j + f_i \bar{e}_j$ bezüglich irgendeiner Orthonormalbasis. Zeige, dass $\mathbf{A^2}$ alle Eigenschaften von $\mathbf{P}_{\mathbb{T}}$ hat, wobei $\mathbb{T} \subset \mathbb{V}$ die lineare Hülle von $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ ist.

22. Sei $\mathbf{x}$ Eigenvektor des selbstadjungierten Operators $\mathbf{A}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$. Verifiziere, dass

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \frac{\langle \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u} | \mathbf{A}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{u}\|^2} = 0 \qquad \forall\, \mathbf{u}$$

23. a) Beweise: Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ selbstadjungierte Operatoren. Dann ist es $\frac{1}{i}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ebenfalls, wobei i die imaginäre Einheit ist.
b) Berechne $\frac{1}{i}[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k]$.

24. Betrachte Operatoren, die in einer ON-Basis die Form

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \quad a^2 + b^2 > 0 \qquad b)\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$c)\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_1 \\ a_3 & 0 & -a_2 \\ -a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$$

haben. Berechne ihre Eigenwerte und deren Entartung.

25. Finde für $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ eine Basis aus Eigenvektoren.

26. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Beweise, dass

$$\left(\sum_i x_i \boldsymbol{\sigma}_i \right)^2 = ||\mathbf{x}||^2 \, \mathbf{E}$$

27. Berechne die Unschärfe von $\sum_i x_i \boldsymbol{\sigma}_i$ im Zustand $\boldsymbol{\psi} = (0,1) \in \mathbb{C}^2$.

28. Berechne $\mathbf{A^{99}}$ für die Operatoren

$$a)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i\frac{\sqrt{15}}{2} \\ -i\frac{\sqrt{15}}{2} & 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Schreibe $\mathbf{A}$ in der Form $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_{\lambda_1} + \lambda_2 \mathbf{P}_{\lambda_2}$.

29. Ermittle die Werte ω^2, für die die Gleichung $(-\omega^2 \mathbf{K} + \mathbf{U})\mathbf{Q} = 0$ nichttriviale Lösungen hat:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \ |a| \neq 2\,, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \ c \neq 0$$

Für $|a| < 2$ wird ω^2 komplex. Wie verträgt sich das mit dem Resultat der Vorlesung, das die Realität von ω^2 garantiert?

30. Berechne $e^{\mathbf{A}t}$ für die folgenden Operatoren:

$$a)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad e)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad f)\ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis für b) und f): Schreibe $\mathbf{A}$ in der Form $\mathbf{A} = c\,\mathbf{E} + \mathbf{B}$, wobei $\mathbf{B}$ nilpotent ist.
Hinweis für c) und e): Schreibe $\mathbf{A}$ als $\mathbf{A} = \mathbf{T^{-1}} \mathbf{A'} \mathbf{T}$, wobei $\mathbf{A'}$ eine Diagonalmatrix ist und benutze $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T^{-1}} e^{\mathbf{A'}t} \mathbf{T}$.
Überprüfe weiters, dass die Ergebnisse die Operatordifferentialgleichung $\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t}$ erfüllen.

31. Berechne $e^{\mathbf{A}t}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\Gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega^2 > \Gamma^2 > 0$$

Wie ist der Zusammenhang mit dem gedämpften harmonischen Oszillator?

32. Betrachte den gedämpften harmonischen Oszillator mit gegebener äusserer Anregung $f(t)$, also $\ddot{Q} + 2\Gamma\dot{Q} + \omega^2 Q = f$. Es wachse $f(t)$ für $t \to -\infty$ nicht zu stark an, z.B. sei $f(t)$ für $t \to -\infty$ beschränkt. Die retardierte Lösung lautet

$$Q_{ret}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ret}(t-t')f(t')dt' \,,$$

wobei $G_{ret}(t) = \Theta(t)\, e^{-\Gamma t} \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega}}$ ist und $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \Gamma^2}$. Verifiziere die Lösungseigenschaft.

33. Betrachte das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

im Quadranten $0 < |x_1| < x_2$ des $\mathbb{R}^2$ und unterwerfe es der durch $\rho = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}$, $\xi = \operatorname{artanh} \frac{x_1}{x_2}$ gegebenen Koordinatentransformation.

34. Das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ist invariant unter allen linearen Transformationen, m.a.W. jede Transformation der Form $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist eine Symmetrie des obigen Vektorfelds. Warum?

35. Finde die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = -tx$$

für $x \in \mathbb{R}^1$. Sei $x(t)$ eine Lösung dieser Gleichung: ist dann $y(t) = x(t-1)$ ebenfalls eine Lösung? Wie ist das vergleichsweise bei ODE's mit konstanten Koeffizienten?

36. Berechne für die Gleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ mit Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$ die Grössen $\dot{\mathbf{x}}(0), \ddot{\mathbf{x}}(0), \dddot{\mathbf{x}}(0)$. Hier ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ oder allgemein) mit euklidischem Skalarprodukt $\langle\ |\ \rangle$:

   a) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2 \mathbf{x}$

   b) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}|\mathbf{b}\rangle \mathbf{x} - ||\mathbf{x}||^2 \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{b}$ ein konstanter Vektor $\in \mathbb{R}^n$ ist.

37. Löse die Gleichung $\dot{x} = x^2$ für $x(0) = x_0 < 0$. Existiert die Lösung für alle Zeiten?

38. Skizziere das Vektorfeld in $\mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = 1-x^2$. Diskutiere das qualitative Lösungsverhalten für die Gleichung $\dot{x} = 1 - x^2$ in den verschiedenen Bereichen: $x(0) = x_0 < -1, x_0 = -1, -1 < x_0 < 1, x_0 = 1, x_0 > 1$. Finde die entsprechenden expliziten Lösungen.

39. Betrachte die Gleichung $\dot{x} = 1 - \epsilon x^2$ für $\epsilon > 0$. Versuche durch Skalierung von x und t das Problem auf die vorige Aufgabe zurückzuführen und diskutiere den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ für die Lösung, wenn $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

40. Betrachte die Gleichung

$$\ddot{q} = -U'(q)$$

für das "Doppelmuldenpotential" $U(q) = (1-q^2)^2$. Skizziere die Mengen $H^{-1}(E)$ für $E = 0, 0 < E < 1, E = 1$ und $E > 1$ und beschreibe die verschiedenen Möglichkeiten für Bahnen im Phasenraum. Begründe, dass $\lim_{E\to 1} T(E) = \infty$ ist.

41. Sei $\mathbf{A}$ die Matrix in (3.81). Beweise, zumindest für $n = 2, 3, 4$, dass das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ die Gestalt hat $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)$.

42. Löse die Gleichung

$$x^{(3)} - x'' + 4x' - 4x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 1$.

43. Welche Relation, für die ODE in Bsp.42, muss zwischen Anfangsbedingungen bestehen, sodass die Lösung periodisch ist?

44. Löse die Gleichung

$$x^{(3)} + 2\,x'' + x' = 1$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

45. Finde eine ODE vom Typ (3.99), die die Funktionen $\sin 2t,\ t^2e^{2t},\ -e^{-t}$ zu Lösungen hat. Welche Ordnung hat die Differentialgleichung mindestens?

46. Betrachte die 1-Form $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ mit $P(x,y) = x^2 - y^2$ und $Q(x,y) = -2\,xy$. Ist ω exakt? Wenn ja, finde ein $F(x,y)$, sodass $\omega = dF$.

47. Betrachte die 1-Form $\omega = \omega_1 + \omega_2$, wobei ($e_1$ und e_2 sind Konstante)

$$\omega_1 = e_1\,(x^2+y^2)^{-1}[-x\,dy + y\,dx]\,, \quad \omega_2 = e_2\,[(x+1)^2+y^2]^{-1}[-(x+1)\,dy + y\,dx]$$

und berechne $\oint_\gamma \omega$ für die verschiedenen Klassen geschlossener Wege.

48. Sei $\omega = (n+1)^{-1} x^m y^{n+1}\, dx + (m+1)^{-1} x^{m+1} y^n\, dy$. Was ist $\oint_\gamma \omega$ für geschlossene Wege γ ?

49. Ergänze die Details zur Herleitung der Formel $(a, b > 0)$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

in der Vorlesung.

50. Der komplexen Winkelfunktionen sind definiert als

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

Beweise die Formeln

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \qquad \sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z'$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \qquad |\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y\,, \qquad |\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

51. "Riemannsche Zahlenkugel": Die Einheitskugel $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist die Menge aller (x, y, u):

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1$$

Die Punkte P und P' sind die Elemente $(0, 0, 1)$ resp. $(0, 0, -1)$ von $\mathbb{S}^2$. Wir projizieren Punkte von $\mathbb{S}^2 \backslash \{P\}$ stereographisch auf die Äquatorebene $u = 0$, aufgefasst als komplexe Ebene $\{z \in \mathbb{C}\}$. Wir betrachten analog die stereographische Projektion von Punkten $(x, y, u) \in \mathbb{S}^2 \backslash \{P'\}$ auf die Äquatorebene $u = 0$, wählen aber für z' den zum Bildpunkt komplex konjugierten Punkt. Zeige, dass die so definierten zwei Koordinatensysteme auf $\mathbb{S}^2$ durch $zz' = 1$ verbunden sind.

52. Sei $a > b > 0$. Berechne die Residuen der Funktion

$$f(z) = \frac{z^3}{a^2(z^2+1)^2 - b^2(z^2-1)^2}$$

innerhalb des Einheitskreises (eventuell auch ausserhalb des Einheitskreises und für $z = \infty$). Hinweis: der Nenner lässt sich schreiben als

$$a^2(z^2+1)^2 - b^2(z^2-1)^2 = (a^2 - b^2)(z^2 + u^2)(z^2 + \frac{1}{u^2}) \qquad u > 0$$