Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II (SS 09)

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das Linienelement des Minkowskiraums in einem Bezugssystem (Koordinaten t, x, y, z), das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die z-Achse eines Inertialsystems rotiert. (Führen Sie in letzterem Zylinderkoordinaten ein und substituieren Sie $\phi \mapsto \phi - \Omega t$.)
Resultat: $ds^2 = -(1 - \Omega^2(x^2 + y^2))dt^2 + 2\Omega(ydx - xdy)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
b) Wie lauten die Geodätengleichungen für x, y und z im rotierenden System?
c) Zeigen Sie, dass diese sich im nichtrelativistischen Limes auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein freies Teilchen in einem rotierenden System reduzieren.

Aufgabe 2

Das Fermat'sche Prinzip. Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex $n(\vec{x})$ ist $c/n(\vec{x})$. Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass Lichtstrahlen im *Raum* (nicht in der Raum-Zeit!) ihren Weg so nehmen, dass die Laufzeit zwischen zwei Punkten minimiert wird.
a) Zeigen Sie, dass Lichtwege Geodäten des dreidimensionalen Raums mit Linienelement

$$dS^2_{Fermat} = n^2(\vec{x})dS^2$$

sind, wo $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ das euklidische Linienelement ist.
b) Wie lauten die Geodätengleichungen für die Koordinaten x, y, z?

Aufgabe 3

Eine Kugel mit Radius R und Brechungsindex

$$n(r) = [2 - (\frac{r}{R})^2]^{1/2}$$

wird als *Lüneburg-Linse* bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 2, dass die Kugel jedes von außen einfallende parallele Strahlenbündel auf einen Punkt ihrer Oberfläche fokussiert.

Aufgabe 4

Bedeutung des affinen Parameters für Nullgeodäten. Zeigen Sie, dass die zurückgelegte Weglänge (gemessen von einem inertialen Beobachter) einen affinen Parameter für ein masseloses Teilchen im Minkowskiraum darstellt. Wie ist diese Aussage für eine allgemeine Raum-Zeit zu modifizieren?

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i{}_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = \kappa(x, \dot{x}, \cdots)\dot{x}^i$$

mit einer "beliebigen" Funktion κ eine Geodäte beschreibt, wobei die Ableitung sich auf einen Parameter λ bezieht. Bestimmen Sie zu diesem Zwecke unter Verwendung von κ einen affinen Parameter $\tau = \tau(\lambda)$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie das Verhalten der Christoffel-Symbole unter einer AKT:

$$\Gamma'^i{}_{jk} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\Gamma^l{}_{mn} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^j \partial x'^k}.$$

Folgern Sie daraus die Gültigkeit der Formel für $\nabla_k v^i$.

Aufgabe 7

Verifizieren Sie die Formel $\nabla_k v_i = v_{i,k} - \Gamma^l{}_{ik} v_l$.

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie, dass im Ursprung eines RNKS gilt:

$$\Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{lj,k} + \Gamma^i{}_{kl,j} = 0.$$

Anleitung: Betrachten Sie $d^3x^i/d\tau^3$ entlang Geodäten.

b) Beweisen Sie die zyklische Symmetrie des Riemann-Tensors.

Aufgabe 9

Folgern Sie aus 8.a), dass im Ursprung eines RNKS gilt:

$$g_{ij,kl} = \frac{1}{3}(R_{iklj} + R_{ilkj}).$$

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass R_{abcd} durch $S_{abcd} := R_{d(ab)c}$ bestimmt ist. Hinweis: Bilden Sie die Antisymmetrisierung von S_{abcd} in b und c.

Aufgabe 11

Beweisen Sie die Bianchi-Identität.

Aufgabe 12

Zeigen Sie: In 4 Dimensionen ist $T_{ik} \mapsto T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T^l{}_l$ eine Involution auf dem Raum der symmetrischen Tensoren.