Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II

Aufgabe 45

Der kovariante Riemanntensor kann sowohl bezüglich des ersten als auch bezüglich des zweiten Indexpaars dualisiert werden. Macht man beides, erhält man den *doppelt dualen* Riemann-Tensor $*R*$. Zeigen Sie, dass $(*R*)_{ki}{}^{jk} = G_i{}^j$.

Aufgabe 46

Zeigen Sie
a) $\delta g = g g^{ik} \delta g_{ik}$ und
b) $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} = \Gamma^l{}_{il}$.
Folgern Sie aus b), dass für ein total antisymmetrisches Tensorfeld T gilt

$$\nabla_i T^{ii_1\cdots i_p} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} T^{ii_1\cdots i_p}).$$

Aufgabe 47

Zeigen Sie $\mathcal{L}_u v = [u, v]$ und $[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u,v]}$.

Aufgabe 48

Zeigen Sie: Falls ein Killingvektorfeld $\xi \neq 0$ existiert, gibt es ein KS, in dem g_{ik} von einer Koordinate nicht abhängt.

Aufgabe 49

Der Gauß'sche Satz für ein antisymmetrisches Tensorfeld $J^{ik} = -J^{ki}$ auf einer Hyperfläche Σ lautet

$$\int_\Sigma \nabla_i J^{ik} d\sigma_k = \int_{\partial\Sigma} J^{ik} d\sigma_{ik}$$

$$(d\sigma_{ik} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{iklm} dx^l \wedge dx^m).$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass eine Raum-Zeit mit Killingvektor ξ die Erhaltungsgröße

$$\int_{S_\infty} \nabla^i \xi^k d\sigma_{ik}$$

besitzt, wo S_∞ der "Rand im Unendlichen" einer raumartigen Hyperfläche ist. Wie hängt diese Erhaltungsgröße mit der in der Vorlesung hergeleiteten $\int_\Sigma j^a d\sigma_a$ zusammen?
Hinweis: Verwenden Sie die Einstein-Gleichungen.

Aufgabe 50

Verallgemeinern Sie die speziell-relativistische Maxwell-Wirkung

$$S[A] = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{ij} F^{ij} + \int d^4x j^i A_i$$

auf eine gekrümmte Raum-Zeit und leiten Sie daraus die kovarianten Maxwell-Gleichungen her.

Aufgabe 51

Ein Flugzeug fliegt mit 1000 km/h in 10 km Höhe. Berechnen Sie die Zeitdifferenz einer mitfliegenden Uhr relativ zu einer am Erdboden ruhenden nach einer Erdumrundung entlang des Äquators für Ost- bzw. Westflug.