Übungen zu Relativitätstheorie und Kosmologie II

Aufgabe 30

Beweisen Sie mit der abstrakten Definition eines Tangentenvektors v, dass $v(c) = 0$ für eine konstante Funktion c.

Aufgabe 31

Zeigen Sie, dass die Tangentenvektoren $\partial_i|_P$ eine Basis für T_P bilden. Verwenden und beweisen Sie folgendes Lemma: Eine beliebige Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist darstellbar als $\phi(x) = \phi(0) + g_i(x)x^i$ mit $g_i(0) = \partial_i\phi|_0$.

Aufgabe 32

Zeigen Sie abstrakt, dass die Lie-Klammer zweier Vektorfelder ein Vektorfeld ist und berechnen Sie die Komponenten von $[u, v]$.

Aufgabe 33

Berechnen Sie den Defizitvektor Δ eines von zwei Vektoren auf einer afffinen Mannigfaltigkeit gebildeten infinitesimalen Parallelogramms.

Aufgabe 34

Zeigen Sie: Die Koeffizienten einer torsionsfreien Konnexion können in einem beliebigen Punkt zu 0 transformiert werden.

Aufgabe 35

Zeigen Sie: Die Koeffizienten einer torsionsfreien Konnexion können entlang einer beliebigen Linie zu 0 transformiert werden.

Aufgabe 36

Berechnen Sie $\nabla_{[i}\nabla_{j]}f$ und $\nabla_{[i}\nabla_{j]}v^a$.

Aufgabe 37

Einer der ersten Versuche, den Elektromagnetismus zu geometrisieren, verwendete die Minkowskimetrik und die Konnexion mit kartesischen Koeffizienten $L^i{}_{jk} = \delta^i{}_j A_k$.

a) Berechnen Sie den Krümmungstensor dieser Konnexion.

b) Warum ist eine solche Konnexion physikalisch nicht akzeptabel? (Betrachten Sie die vorübergehende Separation zweier Maßstäbe.)

c) Berechnen Sie $\nabla_i \eta_{jk}$.

d) Wie lauten die Koeffizienten in krummlinigen Koordinaten bzw. mit einer allgemeinen Lorentz-Metrik?

Aufgabe 38

Bezieht man die Konnexion aus 37. auf eine anholonome Basis $\{e_A = e_A^{\ i}\partial_i\}$, erhält man (mit der zu $\{e_A\}$ dualen Basis $\{e^B\}$)

$$L^A{}_{Bi} = e_j{}^A e_B{}^k L^j{}_{ki} + e_l{}^A e_B{}^l{}_{,i}$$

(warum?). Wie ist $\{e_A\}$ zu wählen, damit diese Transformation einer Eichtransformation $A_i \mapsto A_i + \Lambda_{,i}$ entspricht?

Aufgabe 39

Die 1-Form der metrischen Konnexion einer Riemann-Cartan-Mannigfaltigkeit bezogen auf ein orthonormales n-Bein heißt "Spin-Konnexion". Zeigen Sie, dass jede Spin-Konnexion $L_{ABi} = -L_{BAi}$ erfüllt.

Aufgabe 40

Das Theorema egregium. Eine glatte Fläche im $\mathbf{E}^3$ kann in der Umgebung eines beliebigen Punktes in geeigneten kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$ genähert werden (warum?). Zeigen Sie, dass R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien im betrachteten Punkte sind. Berechnen Sie die induzierte Metrik $g_{ij}(x, y)$ in der Umgebung und den Krümmungsskalar im betrachteten Punkt.

Aufgabe 41

Beweisen Sie die Identität $R_{ijkl} = R_{klij}$ für den Riemann-Tensor als Konsequenz der in der Vorlesung gelisteten Identitäten 1-3.

Aufgabe 42

Zeigen Sie, dass der Riemann-Tensor in 4 Dimensionen 20 algebraisch unabhängige Komponenten hat.

Aufgabe 43

Verifizieren Sie die Spurfreiheit und die algebraischen Symmetrien des Weyl-Tensors.

Aufgabe 44

Verifizieren Sie die Komponenten einer metrischen Volumsform in lokalen Koordinaten.