Übungen zu RT2 SS 2007

1. Wir betrachten den flachen $\mathbb{R}^2$ in cartesischen Koordinaten (x, y). Berechne die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} in Polarkoordinaten (r, ϕ) auf 2 Weisen:
   a) über die Transformationsformel für Γ^i_{jk},
   b) aus der Metrik g_{ij} in Polarkoordinaten.

2. Betrachte den Laplace-Operator auf Skalare F als die (mehrfache) kovariante Ableitung
$$\Delta F = g^{ij}\, \nabla_i \nabla_j F, \tag{1}$$
und berechne so den ebenen Laplaceoperator in Polarkoordinaten.

3. Schreibe die Geodätengleichung in Polarkoordinaten auf und zeige, dass E ind l Erhaltungsgrössen sind, wobei
$$r^2 \dot{\phi} =: l \tag{2}$$
$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} =: E^2 \tag{3}$$

4. Beweise: das Kronecker-Delta $\delta_\mu{}^\nu$ ist in seiner Eigenschaft als $(1, 1)$-Tensor invariant, d.h. seine Komponenten haben in allen Koordinatensystemen dieselben Werte.

5. Zeige: durch die Transformation $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(0) x^\nu x^\lambda$ werden die Christoffelsymbole im Ursprung auf 0 transformiert.

6. Beweise:
$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} [\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}] \tag{4}$$

7. Seien ∇_μ, ∇'_μ torsionsfreie Zusammenhänge, also z.B.
$$\nabla'_\mu v^\nu = \nabla_\mu v^\nu + C^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda \tag{5}$$
mit $C^\mu_{\nu\lambda} = C^\mu_{\lambda\nu}$. Dann gilt:

   a) $\nabla'_{[\mu}\omega_{\nu]} = \nabla_{[\mu}\omega_{\nu]}$

   b) $u^\mu \nabla'_\mu v^\nu - v^\mu \nabla'_\mu u^\nu = u^\mu \nabla_\mu v^\nu - v^\mu \nabla_\mu u^\nu$

   c) $u^\mu \nabla'_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \nabla'_\nu u^\mu = u^\mu \nabla_\mu \omega_\nu + \omega_\mu \nabla_\nu u^\mu$

8. Seien $(x^i) = (\Theta, \Phi)$ Koordinaten auf der Einheits-Sphäre mit der Metrik
$$g_{ij}\, dx^i dx^j = d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\Phi^2. \tag{6}$$
und $F(\Theta,\Phi) = \cos\Theta$. Dann gilt
$$\nabla_i \nabla_j F = -F g_{ij} \tag{7}$$

9. Sei ξ^μ ein Vektorfeld mit Komponenten $\xi^\mu = \delta_0^\mu$ in einem Koordinatensystem. Zeige: in diesem Koordinatensystem gilt auch
$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \tag{8}$$

10. Zeige, dass die rechte Seite von Glg.(8) auch gegeben ist durch
$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + 2 g_{\rho(\mu}\partial_{\nu)}\xi^\rho \tag{9}$$

11. Sei $\Box$ der d'Alembert-Operator $\Box f = g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu f$. Dann gilt
$$[\Box, \nabla_\mu] f = R_\mu{}^\nu \nabla_\nu f \tag{10}$$

12. Sei ξ^μ ein kovariant konstantes Vektorfeld, d.h $\nabla_\mu \xi^\nu = 0$. Dann gilt
$$R_{\mu\nu\sigma\rho}\xi^\rho = 0. \tag{11}$$
Folgere daraus: wenn es vier linear unabhängige, kovariant konstante Vektorfelder gibt, ist die Raumzeit flach.

13. Sei die Lieableitung $\mathcal{L}_\xi$ (für Skalare und kovariante Tensorfelder 1-ter und 2-ter Stufe) definiert durch (vgl. Beispiele 7c und 10)
$$\mathcal{L}_\xi f = \xi^\rho \partial_\rho f \tag{12}$$
$$(\mathcal{L}_\xi \omega)_\mu = \xi^\rho \partial_\rho \omega_\mu + (\partial_\mu \xi^\rho)\omega_\rho \tag{13}$$
$$(\mathcal{L}_\xi t)_{\mu\nu} = \xi^\rho \partial_\rho t_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi^\rho) t_{\rho\nu} + (\partial_\nu \xi^\rho) t_{\mu\rho} \tag{14}$$
Beweise: (a) Die Lieableitung kommutiert mit dem Gradienten. (b) Die Lieableitung erfüllt die Leibniz-Regel bezüglich des Tensorprodukts.

14. Seien $\bar{g}_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ Metriken mit $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, $\Omega > 0$. Beweise
$$\bar{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Omega^{-1}[2\delta^\mu{}_{(\nu}\nabla_{\lambda)}\Omega - g_{\nu\lambda}\nabla^\mu \Omega] \tag{15}$$

15. Sei ξ^μ ein Vektorfeld und (t, x^i) Koordinaten, sodass $\xi^\mu = (1,0,0,0)$. Zeige, dass diese Form von ξ^μ sich unter den Transformationen

$$\bar{t} = t - F(x^i), \quad \bar{x}^i = f^i(x^j) \tag{16}$$

nicht ändert.

16. Sei der Energie-Impulstensor $T_{\mu\nu}$ gegeben durch

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}, \quad u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1, \tag{17}$$

wobei $\rho = \rho(p),\ p = p(\rho)$. Sei $n(\rho)$ definiert durch

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\rho}{\rho + p} \iff p\, d\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\rho}{n}\right) = 0 \tag{18}$$

Zeige, dass

(i) $\nabla_\mu (n u^\mu) = 0,$ (ii) $(\rho + p) u^\mu \nabla_\mu u_\nu = -(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \nabla^\mu p$

17. Der Ablenkwinkel $\Delta\phi$ eines Lichtstrahls als Funktion des minimalen Radius r_0 hat keine obere Schranke. Zeige, dass

$$\Delta\phi(u_0) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2 - 2u_0(1 - t^3)}} \qquad \left(u_0 = \frac{GM}{r_0 c^2}\right) \tag{19}$$

im Intervall $u_0 \in [0, \frac{1}{3})$ monoton wachsend ist und

$$\Delta\phi(0) = \pi, \qquad (\Delta\phi)'(0) = 4, \qquad \lim_{u_0 \to \frac{1}{3}} \Delta\phi(u_0) = \infty \tag{20}$$

18. Führe in der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{21}$$

die Koordinaten (u, r, Θ, ϕ) ein gemäss

$$u = t + r + 2M \lg |r - 2M| = \bar{t} + r \tag{22}$$

Folgere: die SS-Metrik $g_{\mu\nu}$ ist von der Form $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$, wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik ist und k_μ ein Nullvektor bezüglich $\eta_{\mu\nu}$ ist von der Form $k_\mu dx^\mu = \sqrt{\frac{4M}{r}}\,(d\bar{t} + dr)$.

19. Der Riemann-Tensor der linearisierten Theorie lautet bekanntlich

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \partial_{[\nu} h_{\mu]\sigma} - \partial_\sigma \partial_{[\nu} h_{\mu]\rho} \tag{23}$$

Beweise, dass $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariant unter Eichtranformationen ist.

20. Transformiere im Minkowski-Raum von Standard- zu gleichförmig rotierenden Koordinaten. Berechne die Komponenten g_{0i} der Minkowski-Metrik in dem neuen Koordinatensystem.

21. Der (konstante) Polarisationstensor $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{(\mu\nu)}$ hat die Eigenschaften $\epsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0$, $\epsilon_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 0$. Zeige: durch geeignete Wahl des lichtartigen Vektors k^μ und Eichtransformationen $\epsilon_{\mu\nu} \mapsto \bar{\epsilon}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + c_\mu k_\nu + c_\nu k_\mu$ kann man erreichen, dass $\epsilon_{22} = -\epsilon_{33}$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$ die einzig nicht-verschwindenden Komponenten von $\epsilon_{\mu\nu}$ sind.

22. Betrachte den Tensor im Minkowskiraum

$$C_{\mu\nu\sigma\rho} = k_{[\mu} C_{\nu][\sigma} k_{\rho]}, \tag{24}$$

wobei k ein lichtartiger Vektor und $C_{\mu\nu}$ symmetrisch und spurfrei ist und $C_{\mu\nu}k^\nu = 0$ erfüllt. Zeige: $C_{\mu\nu\sigma\rho}$ besitzt alle Symmetrien eines Riemann-Tensors und ist überdies spurfrei.

23. Sei u^μ ein zeitartiger Vektor und $E_{\nu\sigma} = C_{\mu\nu\sigma\rho} u^\mu u^\rho$. Zeige ohne Verwendung von Bsp.21, dass $E_{\mu\nu}$ bei geeigneter Wahl von u^μ und k^μ eine einfache Block-Form hat. (Hinweis: aus der Form (24) folgt, dass $C_{\mu\nu\rho\sigma} k^\sigma = 0$.)

24. Sei $T^{\mu\nu}$ ein erhaltener Energie-Impulstensor im Minkowski-Raum mit räumlich kompaktem Träger. Dann gilt in Standard-Koordinaten (t, x^i) das "Laue-Theorem"

$$\int T_{ij}\, d^3x = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T_{00} x_i x_j\, d^3x \tag{25}$$

Hinweis: $T_{00,00} = T_{kl,kl}$.

25. Sei - für beliebige Dimension n - der Tensor $L_{\mu\nu}$ gegeben durch

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(n-1)} R g_{\mu\nu}\right). \tag{26}$$

Zeige, dass im Ausdruck

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + 2a(g_{\rho[\mu} L_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu} L_{\nu]\rho}) \tag{27}$$

die Konstante a so gewählt werden kann, dass $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ spurfrei ist.

26. Sei $g_{ij}(t,x)$ eine räumliche Metrik mit

$$\dot{g}_{ij}(t,x) = 2\alpha(t) g_{ij}(t,x) \tag{28}$$

Zeige: dann gilt, dass

$$g_{ij}(t,x) = \frac{S^2(t)}{S^2(t_0)}\, g_{ij}(t_0,x) \tag{29}$$

wobei S folgendermassen gewählt ist:

$$\alpha = \frac{\dot{S}}{S}\,. \tag{30}$$

27. Sei u^μ ein Geschwindigkeitsfeld mit $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -1$ und seien (λ, x^i) mitbewegte Koordinaten, also $u^\mu \stackrel{*}{=} (1,\vec{0})$. Folgt daraus im allgemeinen für die Niveauflächen von λ, dass sie (a) auf u^μ orthogonal stehen, oder (b) so gewählt werden können, dass sie auf u^μ orthogonal stehen, oder (c) keines von beiden?
Hinweis: Für (b,c) beachte Bsp.(15)

28. Sei h die Determinante des räumlichen Teils h_{ij} der kosmologischen ("FLRW = Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker") Metrik. Gib einen direkten Beweis von

$$\partial_t \sqrt{h} = 3\alpha\sqrt{h}\,. \tag{31}$$

Hinweis: Verwende die Formel

$$\frac{\partial h}{\partial h_{ij}} = h h^{ij} \tag{32}$$

29. Vervollständige die Rechnung aus der Vorlesung, die zeigen soll, dass der Riemann-Tensor der FLRW-Metrik die folgende Form hat:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2}{3}(\kappa\rho + \Lambda) g_{\rho[\mu} g_{\nu]\sigma} - 2\kappa(\rho + p)\, u_{[\mu} g_{\nu][\rho} u_{\sigma]} \tag{33}$$

30. Der "Milne-Kosmos" hat das Linienelement

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 \left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right) \tag{34}$$

Beweise, dass der Milne-Kosmos ein Teil des Minkowski-Raums (also flach) ist
(i) durch Benutzung der Friedmann-Gleichungen,
(ii) durch Betrachten der Transformation

$$t = \sqrt{T^2 - R^2}, \quad \rho = \frac{R}{\sqrt{T^2 - R^2}} \tag{35}$$

31. Überprüfe, dass die in der Vorlesung eingeführte Ableitung D_μ metrisch ist, also

$$D_\mu h_{\nu\rho} = 0 \tag{36}$$