

Übungen zu Relativitätstheorie I im WS 2015

Aufgabe 27

Zeigen Sie, dass das Minkowski-Skalarprodukt nicht entartet ist.

Aufgabe 28

Zeigen Sie $L_{\mathbb{R}}L_{\vec{v}} = L_{\mathbb{R}\vec{v}}L_{\mathbb{R}}$ allgemein und $L_{\mathbb{R}}L_{\vec{w}(\vec{v},\vec{u})} = L_{\vec{w}(\vec{u},\vec{v})}L_{\mathbb{R}}$, wenn \mathbb{R} die Thomasrotation von \vec{v} und \vec{u} ist.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren eines allgemeinen Lorentzboosts $L_{\vec{v}}$ und einer Rotation $L_{\mathbb{R}}$ (bei geeigneter Basiswahl so gut wie keine Rechnung erforderlich!). Zeigen Sie insbesondere, dass $L_{\vec{v}}$ und $L_{\mathbb{R}}$ je zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben. Was sind daher die 2-Ebenen, die unter diesen Lorentztransformationen invariant sind?

Aufgabe 30

$L_{\vec{v}}$ und $L_{\mathbb{R}}$ sind Prototypen von zeit- bzw. raumartigen 'Drehungen'. Wie wird man diese allgemein definieren? Zeigen Sie, dass es auch Lorentztransformationen gibt, die einen lichtartigen Vektor (z.B. $(1,1,0,0)$) und einen darauf orthogonalen raumartigen Vektor (z.B. $(0,0,1,0)$) als Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben (lichtartige Drehungen).

Hinweis: Stellen Sie die Lorentztransformation als $L = e^A$ dar. Welche algebraische Eigenschaft hat A ?

Aufgabe 31

a) Das innere Produkt zweier Vierergeschwindigkeiten uv enthält Information über die Relativgeschwindigkeit. Welche?

b) Formulieren Sie die relativistische Geschwindigkeitsaddition als Gleichheit zweier Vierervektoren und gewinnen Sie daraus einen kurzen Beweis der Nichtassoziativität.

Aufgabe 32

Drücken Sie die Vierergeschwindigkeit u durch die Rapidität χ von $|\vec{v}|$ und die Richtungswinkel θ und ϕ von \vec{v} aus. Identifizieren Sie χ mit einer Bogenlänge im Sinn der Minkowskigeometrie und mit einem Flächeninhalt im Sinn der euklidischen Geometrie. (Lassen Sie sich vom euklidischen Analogon von χ inspirieren.)

Aufgabe 33

Ein anfänglich ruhendes Objekt wird ab einem gewissen Zeitpunkt konstant mit $b = 1g$ (Erdbeschleunigung) beschleunigt. Wie groß ist der zurückgelegte Weg nach 1, 10, 100 Jahren Eigenzeit? Wie lange braucht es für eine Strecke von 10^{10} Lichtjahren?

Aufgabe 34

Eine Rakete soll eine Nutzlast der Masse m während der Eigenzeit $S = 1$ Jahr konstant mit $b = 1g$ beschleunigen. Wieviel Treibstoffmasse M_0 ist mindestens erforderlich? Wie lautet die Antwort, wenn nur gefordert wird, dass die dieser Beschleunigungsperiode entsprechende Endgeschwindigkeit erreicht wird?