Übungen zu Relativitätstheorie I im WS 2014

Aufgabe 53

Die *beobachterbezogenen* Feldstärke-4-Vektoren E und B sind definiert durch $E^i = F^{ik}u_k$ und $B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jkl}F^{jk}u^l$ (warum?). Drücken Sie F^{ik} durch E, B und ϵ aus.

Aufgabe 54

Zeigen Sie, dass das Wirkungsfunktional $S[\mathcal{C}] = -m\int_{\mathcal{C}} ds - q\int_{\mathcal{C}} A_i dx^i$ die Lorentzkraft impliziert. Anleitung: Spezialisieren Sie nach Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen auf die Eigenzeit als Parameter.

Aufgabe 55

Zeigen Sie, dass die Wirkung $S[x(s)] = -\frac{m}{2}\int \dot{x}^2 ds - q\int A_i\dot{x}^i ds$ ebenfalls die Lorentzkraft impliziert und berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

Aufgabe 56

Berechnen Sie die Feldstärken $\vec{E}(t,\vec{x})$ und $\vec{B}(t,\vec{x})$ einer mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = (v,0,0)$ bewegten Punktladung q durch Transformation des Coulombfeldes. Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien zu einem fixen Zeitpunkt. Zeigen Sie, dass sie durch eine affine Stauchung aus den Feldlinien der ruhenden Ladung hervorgehen.

Aufgabe 57

Wie sieht das Feldlinienbild für $t > 0$ aus, wenn die Punktladung aus Aufgabe 56 innerhalb des Zeitintervalls $(-\Delta t, 0)$ mit konstanter Beschleunigung auf $\vec{v} = \vec{0}$ abgebremst wird? Zeigen Sie die Existenz einer Strahlungszone, innerhalb derer die Feldlinien zu $t >> \Delta t$ annähernd orthogonal auf dem Verbindungsvektor $\vec{r}$ zum Ort der Ladung sind. Berechnen Sie für $v << 1$ den Quotienten $E_\perp/E_r$ von Transversal- und Radialkomponente von $\vec{E}$ in der Strahlungszone als Funktion des Winkels θ zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ und daraus mit Hilfe von $E_r = q/r^2$ $E_\perp$ selbst.

Aufgabe 58

Sei $F := (F^i{}_j)$. Verifizieren Sie $FF^* = -(\vec{E}\cdot\vec{B})\mathbf{1}$.

Aufgabe 59

Verifizieren Sie mit derselben Notation wie in 58. $F^{*2} - F^2 = -\frac{1}{2}Tr(F^2)\mathbf{1}$. Schließen Sie daraus, dass der Energie-Impuls-Tensor $T^i{}_k$ des elektromagnetischen Feldes dualitätsinvariant ist.

Aufgabe 60

Verifizieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 58 die Identität

$$T^i{}_m T^m{}_k = \frac{1}{16\pi^2}[(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 + \frac{1}{4}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)^2]\delta^i{}_k.$$

Aufgabe 61

Zeigen Sie mit Hilfe der Identität aus Aufgabe 60, dass der Poynting-Vektor eines allgemeinen elektromagnetischen Feldes in einem beliebigen Punkt in einem geeigneten Bezugssystem verschwindet.