1 Ein Astronom beobachtet vier Sterne $S_1, \ldots S_4$ und notiert deren Winkelabstände, also θ_{ij} zwischen S_i und S_j für alle i, j. Zeige, dass die Größe

$$\frac{(1-\cos\theta_{12})(1-\cos\theta_{34})}{(1-\cos\theta_{13})(1-\cos\theta_{24})} \tag{1}$$

unabhängig ist vom Bewegungszustand des Astronomen.

2 **Dopplereffekt**: a) Ein Raumschiff starte von der Erde und beschleunige mit konstanter (Eigen)beschleunigung $\alpha = g$. Wieviel Zeit vergeht für die Astronauten bis sie die blauen Ozeane ($\lambda_b = 450nm$) der Erde als rote ($\lambda_r = 700nm$) Ozeane sehen? Und in die Erde Zeit? Wie weit wird der Raumschiff gehen? (Es folgt, man müsste an Bord des Raumschiffs ein leistungsstarkes Teleskop haben.)

b)Sei α der Winkel zwischen der räumlichen Bewegungsrichtung des Beobachters X und des Photons (von Y aus gesehen, wo Y ist die Quelle des Photons). Zeige, dass es bei gegebener Relativgeschwindigkeit v_{XY} einen eindeutigen Winkel α_{noD} gibt, sodass keine Dopplerverschiebung eintritt (also $\omega_X = \omega_Y$). Beweise schliesslich, dass für kleine Geschwindigkeiten gilt

$$\alpha_{\text{noD}} = \frac{\pi}{2} - \frac{v_{XY}}{2} + O(v_{XY}^3)\,. \tag{2}$$

c) A rigid ring of radius R=1 m spins with constant angular frequency $\omega = 2.1 * 10^8 1/s$ around its axis of symmetry. Every infinitesimal element of the ring emits electromagnetic radiation of length 450 nm (i.e. monochromatic blue light) as measured in the comoving frame of that element. What is the color of the ring perceived by i) an observer at the center of symmetry the ring, stationary with respect to that center, ii) by an observer situated somewhere on the ring, moving together with the ring? [*Hint: calculate the emitted and observed frequencies in the rest frame of the center of the ring.*]

3 **[Alice through the moving mirror.]** A plane mirror moves in the direction of its normal with uniform velocity v in a frame S towards Alice, and facing her (so in Alice's frame the velocity is $(-v, 0, 0)$ with $v > 0$). A ray of light of frequency ω_1 strikes the mirror at an angle of incidence θ, and is reflected with frequency ω_2 at an angle of reflection φ. Prove that

$$\frac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\tan\frac{1}{2}\varphi} = \frac{c+v}{c-v}\,, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{c\cos\theta + v}{c\cos\varphi - v} = \frac{c + v\cos\theta}{c - v\cos\varphi}\,.$$

[*Hint: Let the mirror be fixed in S'; write the obvious relations in S', then transform to S.*]