Mathematische Methoden 1

Vortragender: Piotr T. Chruściel

Mitschrift von Melita Šuput

a1201272

Sommersemester 2014

Quellen: Neufeld: Mathematische Methoden der Physik I; Heinzle: Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Euklidische Vektorräume

1.1 Skalarprodukt

Definition: Sei $(E,+,\cdot)$ = ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (wir werden meist einfach E schreiben, mit "+" und "·" implizit verstanden). Sei $\langle\cdot\mid\cdot\rangle : E\times E\to\mathbb{R}$, $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ heißt Skalarprodukt wenn für alle $x,\ y,\ z\in E,\ a,\ b\in\mathbb{R}$ gilt:

1. Linearität:

   $\langle a\cdot x+b\cdot y\mid z\rangle = a\cdot\langle x\mid z\rangle + b\cdot\langle y\mid z\rangle.$

2. Symmetrie:

   $\langle x\mid y\rangle = \langle y\mid x\rangle.$

3. Positiv definit:

   $\langle x\mid x\rangle\ge 0,\ \langle x\mid x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0.$

Definition: Das kanonische Skalarprodukt (Standardprodukt) auf $\mathbb{R}^n$: $\langle x\mid y\rangle := x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2+\ldots+x_{n-1}\cdot y_{n-1}+x_n\cdot y_n$

Überprüfung in $\mathbb{R}^2$:

1. Linearität:

   $\mathbb{R}^n,\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\ n=2:$

   $\langle a\cdot x+b\cdot y\mid z\rangle = \left(a\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}a\cdot x_1+b\cdot y_1\\a\cdot x_2+b\cdot y_2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right) = (a\cdot x_1+b\cdot y_1)\cdot z_1+(a\cdot x_2+b\cdot y_2)\cdot z_2 = a\cdot(x_1\cdot z_1+x_2\cdot z_2)+b\cdot(y_1\cdot z_1+y_2\cdot z_2) = a\cdot\langle x\mid z\rangle+b\cdot\langle y\mid z\rangle \to$ Linearität erfüllt!

2. Symmetrie ist offensichtlich.

3. Positiv definit:

   $\langle x\mid x\rangle = x_1^2+x_2^2\ge 0,\quad \langle x\mid x\rangle=0 \iff x_1=0=x_2 \iff x=\binom{0}{0}=0$

Bemerkungen:

Linearität bezüglich des 2. Arguments: $\langle x\mid a\cdot y+b\cdot z\rangle = \langle a\cdot y+b\cdot z\mid x\rangle = a\cdot\langle y\mid x\rangle+b\cdot\langle z\mid x\rangle = a\cdot\langle x\mid y\rangle+b\cdot\langle x\mid z\rangle$

Man sagt, dass $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ bilinear ist.

Wenn $\dim E<\infty$ und $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt, dann wird $(E,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ euklidischer Raum genannt.

Beispiele: auf $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x\mid y\rangle = x_1\cdot y_1$ ist symmetrisch, $\in\mathbb{R}$, bilinear, ist aber nicht positiv definit $\Longrightarrow$ kein Skalarprodukt

(b) $\langle x\mid y\rangle = x_1\cdot y_1+2\cdot(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)+x_2\cdot y_2$ ist symmetrisch, $\in\mathbb{R}$, linear, aber nicht positiv definit:

   $\langle x\mid x\rangle = x_1^2+2\cdot(x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_1)+x_2^2 = \underbrace{x_1^2+4\cdot x_1\cdot x_2}_{=(x_1+2\cdot x_2)^2-4\cdot x_2^2}+x_2^2 = (x_1+2\cdot x_2)^2-3\cdot x_2^2$

   Nehmen wir $x=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, dann folgt $\langle x\mid x\rangle=-3<0$, und somit ist $\langle x\mid y\rangle$ nicht positiv definit.

Beispiel: Seien $-\infty<a<b<+\infty$, und sei E der Raum von stetigen Funktionen auf $[a,b]$. Für $f,g\in E$ setzen wir

$$\langle f\mid g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\in\mathbb{R}\,.$$

Dann:

- Symmetrie: klar
- Linearität: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\langle \alpha \cdot f + \beta \cdot g \mid h \rangle = \int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \cdot h(x)\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \cdot h(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \cdot h(x)\, dx = \alpha \cdot \langle f \mid h \rangle + \beta \cdot \langle g \mid h \rangle$
- Positiv definit: $\langle f \mid f \rangle = \int_a^b f^2(x)\, dx \geq 0$. Es sollte auch klar sein dass $\langle f \mid f \rangle = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$.

In diesem Fall $\dim E = \infty$.

Beispiel: $P_k([a,b])$ = Polynome der Ordnung k mit $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$ für $f, g \in P_k$, $\dim P_k = k+1$, daher ist es ein euklidischer Raum.

1.2 Orthonormalbasis

Definition: Unter einem Orthonormalsystem (ONS) in einem euklidischen Vektorraum E versteht man eine Menge von Einheitsvektoren, die paarweise aufeinander orthogonal stehen: $f_1, \ldots, f_k \in E$, $\langle f_i \mid f_k \rangle = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ bzw. $\langle f_i \mid f_k \rangle = \delta_{ik}$.

Wichtig: $(f_1, \ldots, f_k)$ ONS $\rightarrow$ f_i sind linear unabhängig!

Beweis: $\alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_k \cdot f_k = 0 \Longrightarrow \langle f_1 \mid \alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \ldots + \alpha_k \cdot f_k \rangle = 0$

$\alpha_1 \cdot \underbrace{\langle f_1 \mid f_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \cdot \underbrace{\langle f_1 \mid f_2 \rangle}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0} + \alpha_k \cdot \underbrace{\langle f_1 \mid f_k \rangle}_{=0} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0.$

Diesen Vorgang wiederholt man für $f_2, f_3, \ldots, f_k$ und bekommt schließlich $\alpha_i = 0 \ \forall\ i$. $\square$

Definition: Ein ONS heißt vollständig (VONS) oder Orthonormalbasis wenn es eine Basis bildet. Wir werden auch ON Basis oder ONB schreiben.

Wichtige Eigenschaft von VONS:

$$\langle x \mid y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \langle e_i \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \langle e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i \cdot y_j \cdot \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{=1\ i=j,\ =0\ i \neq j} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

entspricht dem **Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$:** $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\langle x \mid y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$.

Definition: Sei $E^n = \mathbb{R}^n$ mit $\langle x \mid y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$. Die *Standardbasis* ist definiert als

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir können schreiben $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$, und dann gilt $\langle e_i \mid e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

1.3 Das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren

Gram-Schmidt Satz: Sei $\{g_1, \ldots, g_k\}$ eine Basis von E. Wenn $\dim E < \infty$, dann existiert ein VONS $\{f_1, \ldots, f_k\}$ mit folgender **Eigenschaft:**

$f_1 \sim g_1$

$f_2 \in \mathrm{Vect}\{g_1, g_2\}$

$\vdots$

$f_i \in \mathrm{Vect}\{g_1, \ldots, g_i\}$

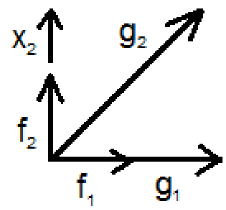
wobei $\mathrm{Vect}\{g_1, \ldots, g_i\}$ = Menge der Linearkombinationen von $g_1, \ldots, g_i = \{\sum_{j=1}^i \alpha_j \cdot g_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}\}$ ist.

Beweis: Wir setzen $f_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$. Dann gilt

$$\langle f_1 \mid f_1 \rangle = \langle \tfrac{g_1}{\|g_1\|} \mid \tfrac{g_1}{\|g_1\|} \rangle = \tfrac{1}{\|g_1\|} \cdot \langle g_1 \mid \tfrac{g_1}{\|g_1\|} \rangle = \tfrac{1}{\|g_1\|^2} \cdot \langle g_1 \mid g_1 \rangle = \tfrac{\langle g_1|g_1\rangle}{\langle g_1|g_1\rangle} = 1.$$

Wir setzen $x_2 = g_2 - \langle g_2 \mid f_1 \rangle \cdot f_1$.

Dann gilt $x_2 \perp f_1$: $\langle x_2 \mid f_1 \rangle = \langle g_2 - \langle g_2 \mid f_1 \rangle \cdot f_1 \mid f_1 \rangle = \langle g_2 \mid f_1 \rangle - \langle g_2 \mid f_1 \rangle \cdot \underbrace{\langle f_1 \mid f_1 \rangle}_{=1} = 0.$



Wir definieren f_2 durch $f_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|}$, wobei wir sicherstellen müssen, dass $\|x_2\| \neq 0$! Um zu zeigen, dass das wirklich so ist, nehmen wir an $\|x_2\| = 0 \Longrightarrow \sqrt{\langle x_2 \mid x_2 \rangle} = 0 \Longleftrightarrow 0 = x_2 = g_2 = \underbrace{\langle g_2 \mid f_1 \rangle \cdot \underbrace{f_1}_{\sim g_1}}_{\sim g_1} \Longrightarrow \{g_1, g_2\}$ linear abhängig $\Longrightarrow \lightning$ zu der Annahme, dass g_1, g_2 zu einer Basis gehören.

Weiter: Man setzt $x_3 = g_3 - \langle g_3 \mid f_1 \rangle \cdot f_1 - \langle g_3 \mid f_2 \rangle \cdot f_2$. Dann zeigt man, dass $x_3 \perp f_1$, $x_3 \perp f_2$, $x_3 \neq 0$ und definiert $f_3 = \frac{x_3}{\|x_3\|}$. Ganz allgemein: $x_i = g_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \langle g_i \mid f_j \rangle \cdot f_j$ mit $f_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$. □

Beispiel: $E = \{\text{Polynome der Ordnung 1 auf } [0,1]\} = \{a + b \cdot x \mid a, b \in \mathbb{R},\ x \in [0,1]\}$

$\langle f \mid g \rangle = \int\limits_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$

Basis $\{x \overset{g_1}{\mapsto} 1,\ g_1(x) = 1;\ x \overset{g_2}{\mapsto} x\ \ g_2(x) = x\}$. Dann gilt $a + b \cdot x = a \cdot g_1(x) + b \cdot g_2(x)$.

$\langle g_1 \mid g_1 \rangle = \int\limits_0^1 g_1(x) \cdot g_1(x)\, dx = \int\limits_0^1 1\, dx = 1$, $\|g_1\| = \sqrt{\langle g_1 \mid g_1 \rangle} = 1$, $f_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = g_1$,

$\langle g_2 \mid f_1 \rangle = \langle g_2 \mid g_1 \rangle = \int\limits_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2}$,

$x_2 = g_2 - \langle g_2 \mid f_1 \rangle \cdot f_1 = x - \frac{1}{2}$, $\|x_2\|^2 = \langle x_2 \mid x_2 \rangle = \int\limits_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx = \frac{1}{3} \cdot (x - \frac{1}{2})^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot ((\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $f_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}$.

1.4 Dualität, transponierte Abbildung

Definition: Sei $\mathscr{E}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$. Der Dualraum ist der Raum der linearen Abbildungen von $\mathscr{E}$ nach $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$.

Notation: $\mathscr{E}^*$

Eigenschaft: $\mathscr{E}^*$ ist auch ein Vektorraum. Für $\alpha, \beta \in \mathscr{E}^*$ und $a, b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) definiert man

- $(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)\ \ \forall\ x \in \mathscr{E}$
- $(a \cdot \alpha)(x) := a \cdot \alpha(x)$

Eigenschaft: $\dim \mathscr{E}^* = \dim \mathscr{E}$.

Wenn wir Elemente von $\mathscr{E}$ als Spaltenvektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{E}$ schreiben, dann können wir Elemente von $\mathscr{E}^*$ als Zeilenvektoren schreiben: $\alpha \in \mathscr{E}^*$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dann

$$\alpha(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n.$$

Definition: Sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathscr{E}$. Für $x \in \mathscr{E}$ ist der transponierte Vektor $x^T \in \mathscr{E}^*$ definiert durch die Gleichung $x^T(y) :=$

$\langle x \mid y\rangle \ \ \forall\ y \in \mathscr{E}$.

Beispiele:

(a) $\mathscr{E} = E^2 = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x \mid y\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Dann ist $\langle x \mid y\rangle = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^T = (x_1, x_2)$.

(b) $E^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow x^T = (x_1, \dots, x_n)$

(c) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$ mit $\langle x \mid y\rangle := x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 = (x_1 + x_2) \cdot y_1 + (x_1 + 2 \cdot x_2) \cdot y_2 = (x_1 + x_2,\ x_1 + 2 \cdot x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^T = (x_1 + x_2,\ x_1 + 2 \cdot x_2)$

x^T hängt vom Skalarprodukt ab!

Definition: Sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ ein Skalarprodukt auf V, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ ein Skalarprodukt auf W und sei $A: V \to W$ eine lineare Abbildung $V \xrightarrow{A} W$. Die transponierte Abbildung $A^T: W \to V$ ist definiert durch die Gleichung

$$\langle A \cdot v \mid w\rangle_W := \langle v \mid A^T \cdot w\rangle_V$$

für alle $v \in V,\ w \in W$.

Seien $\{e_1, \dots, e_k\}$ ein VONS in $(V,\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle_V)$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ ein VONS in $(W,\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle_W)$, $V = \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot e_i$, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot f_j$. Man kann schreiben

$$A \cdot v = \sum_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n} A_{ji} \cdot v_i \cdot f_j \tag{1}$$

(wir schreiben auch $A = (A_{ji})$). Dann ist

$$\langle A \cdot v \mid w\rangle_W = \sum_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n} A_{ji} \cdot v_i \cdot w_j = \langle \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot e_i \mid \sum_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n} A_{ji} \cdot w_j \cdot e_i\rangle\,.$$

Es folgt

$$A^T w = \sum_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n} A_{ji} \cdot w_j \cdot e_i\,.$$

Der Vergleich mit (1) zeigt, dass sich die transponierte Matrix in einer ON Basis einfach durch Vetauschen der Zeilen mit den Spalten ergibt.

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- $A = (a_1\ a_2\ a_3),\ A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x^T = (x_1\ x_2\ x_3)$

Satz [Vollständigkeitsrelationen]: $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist ein VONS in $E \Longleftrightarrow \langle f_i \mid f_j \rangle = \delta_{ij} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f_i^T = Id_E$[1]

Beweis: $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i$. Wir können x_i so berechnen: $\langle f_j \mid x \rangle = \langle f_j \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \langle f_j \mid f_i \rangle = x_j$. So $x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle f_i \mid x \rangle}_{x_i} \cdot f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \underbrace{\langle f_i \mid x \rangle}_{f_i^T(x)} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f_i^T(x) = Id_E(x) \Longleftrightarrow Id_E = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot f_i^T$ □

1.5 Norm

Definition: Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$, dann ist eine Norm eine Abbildung von E nach $\mathbb{R}^+$ mit den folgenden **Eigenschaften:** $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$ und $\forall\ x \in E$

(a) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ absolute Homogenität

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

(c) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ Definitheit

Satz: Sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf E, dann gilt:

(1) $\forall\ x, y \in E : |\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, wo $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ ist (Bunyakovsky-Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(2) $\|\cdot\|$ ist eine Norm

Beweis von (2):

(a) $\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot x \mid \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x \mid x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$

(b) $\|x + y\|^2 = \langle x + y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle = \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

(c) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

1.6 Orthogonale Transformationen

Notation: Sei E ein Vektorraum, und sei $L(E)$ die Menge aller linearen Abbildungen von E nach E.

Satz: Sei $O \in L(E)$, wobei E ein euklidischer Raum sei. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) O ist invertierbar mit $O^{-1} = O^T \Longleftrightarrow O^T \cdot O = O \cdot O^T = Id$

(2) $\forall\ x, y \in E :\ \langle O \cdot x \mid O \cdot y \rangle = \langle x \mid y \rangle$

(3) O ist isometrisch[2], das heißt $\|O \cdot x\| = \|x\|\ \forall\ x \in E$

(4) O bildet jede ONB von E wieder auf eine ONB von E ab.

Man sagt dann, dass O orthogonal ist.

[1] Identität in E, $Id_E(x) = x$, Einheitsmatrix

[2] längentreu, verändert die Länge nicht

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.: $\langle O\cdot x \mid O\cdot y\rangle = \langle\underbrace{O^T\cdot O}_{Id}\cdot x \mid y\rangle = \langle x \mid y\rangle$.

3. $\Rightarrow$ 2. folgt von der Polarisierungsidentität $\langle x \mid y\rangle = \frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}$, denn es gilt

$$\langle O\cdot x \mid O\cdot y\rangle = \tfrac{1}{4}\cdot(\|O\cdot x+O\cdot y\|^2-\|O\cdot x-O\cdot y\|^2) = \tfrac{1}{4}\cdot(\|O\cdot(x+y)\|^2-\|O\cdot(x-y)\|^2) = \tfrac{1}{4}\cdot(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) = \langle x \mid y\rangle.$$

Beispiel:

(a) $O\cdot x = x$ ist orthogonal ($O = Id$)

(b) $O\cdot x = -x$ Spiegelung am Ursprung ($\|-x\| = \|x\|$)

(c) Sei n normal zu einer Ebene S ($\langle n \mid x\rangle = 0\ \forall\ x\in S$), $\|n\| = 1$, dann ist $O\cdot x = x-2\cdot\langle x \mid n\rangle\cdot n$ die Spiegelung an S. O ist orthogonal.

Beweis (von (c)):

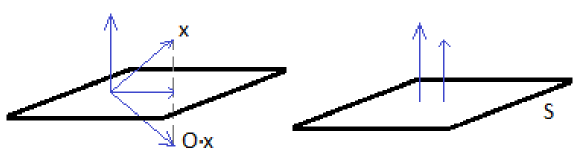
- Spiegelung: Sei $x\perp S$, dann ist $x = \lambda\cdot n$ für ein geeignetes $\lambda\in\mathbb{R}$, und $O\cdot x = x-2\cdot\langle x \mid n\rangle\cdot n = \lambda\cdot n-2\cdot\underbrace{\underbrace{\langle\lambda\cdot n \mid n\rangle}_{=\lambda\cdot\langle n|n\rangle=\lambda\|n\|^2=\lambda}}_{\lambda}\cdot n =$

  $\lambda\cdot n-2\cdot\lambda\cdot n = -\lambda\cdot n = -x$. Sei $x\in S$, dann ist $\langle x \mid n\rangle = O$

- Ist O orthogonal?

  $\langle O\cdot x \mid O\cdot y\rangle = \langle x-2\cdot\langle x \mid n\rangle\cdot n \mid y-2\cdot\langle y \mid n\rangle\cdot n\rangle = \langle x \mid y\rangle-2\cdot\langle x \mid \langle y \mid n\rangle\cdot n\rangle-2\cdot\langle\langle x \mid n\rangle\cdot n \mid y\rangle+4\cdot\langle\langle x \mid n\rangle\cdot n \mid \langle y \mid n\rangle\cdot n\rangle =$

  $\langle x \mid y\rangle-2\cdot\langle y \mid n\rangle\cdot\langle x \mid n\rangle-2\cdot\langle x \mid n\rangle\cdot\langle y \mid n\rangle+4\cdot\langle x \mid n\rangle \mid \langle y \mid n\rangle\cdot\langle n \mid n\rangle = \langle x \mid y\rangle$



Satz: Jede orthogonale Abbildung ist eine Zusammensetzung von Spiegelungen.

Bemerkungen:

1. O orthogonal $\Longleftrightarrow O^{-1}$ orthogonal

   Das kann man so sehen: $O^{-1} = O^T \Longleftrightarrow (O^{-1})^T = O^{TT} = O = (O^{-1})^{-1}$.

2. In endlicher Dimension gilt: $\underbrace{\det(O^{-1})}_{=\frac{1}{\det(O)}} = \det(O^T) = \det(O)$, und somit $(\det(O))^2 = 1 \Longrightarrow \det(O) = \pm 1$.

3. Sei $O(n) = \{O\in L(E^n,E^n),\ O^T = O^{-1}\}$. Dann gilt:

   (a) $O_1,\ O_2\in O(n) \Longrightarrow O_1\cdot O_2\in O(n)$

   (b) $O\in O(n) \Longrightarrow O^{-1}\in O(n)$

   (c) $\mathbb{1}\in O(n),\ \mathbb{1}\cdot O = O\cdot\mathbb{1} = O$

   Es folgt, dass $O(n)$ eine Gruppe bildet (tatsächlich sogar eine Lie-Gruppe).

4. $SO(n) = \{O\in L(E^n,E^n),\ O^T = O^{-1},\ \det(O) = +1\}$

   $SO(n)$ bildet ebenfalls eine Gruppe[3].

[3] special orthogonal

2 Unitäre Vektorräume

Analog zu den euklidischen Vektorräumen, aber $\mathbb{R}$ wird ersetzt durch $\mathbb{C}$.

Motivation:

1. $\mathbb{C}$ ist mathematisch "besser", einfacher (Beispiel: $A \in Mat(n,n):\ W_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$, über $\mathbb{C}:\ \exists\ n$ Nullstellen, aber nicht unbedingt über $\mathbb{R}$)

2. Quantenmechanik → Hilbertraum=(endlich oder unendlich dimensionaler) unitärer Vektorraum

Definition [Komplexes Skalarprodukt]: Ein endlicher Vektorraum über $\mathbb{C}$ heißt unitär (oder endlich dimensionaler Hilbertraum), wenn ein Skalarprodukt $\langle \varphi \mid \psi \rangle \in \mathbb{C}$ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1. Linearität im 2.Argument: $\langle \varphi \mid c_1 \cdot \psi_1 + c_2 \cdot \psi_2 \rangle = c_1 \cdot \langle \varphi \mid \psi_1 \rangle + c_2 \cdot \langle \varphi \mid \psi_2 \rangle\ \ \forall\ \psi_1, \psi_2, \varphi \in \mathscr{U};\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

2. $\langle \varphi \mid \psi \rangle^* = \langle \psi \mid \varphi \rangle\ \ \forall\ \varphi, \psi \in \mathscr{U}$,

3. Positiv definit: $\langle \psi \mid \psi \rangle \geq 0,\ \langle \psi \mid \psi \rangle = 0 \Longleftrightarrow \psi = 0\ \forall\ \psi \in \mathscr{U}$.

2.1 Sesquilinearität

Eigenschaft: $\langle \varphi \mid \psi \rangle$ ist antilinear: das heißt $\langle c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 \mid \psi \rangle = c_1^* \cdot \langle \varphi_1 \mid \psi \rangle + c_2^* \cdot \langle \varphi_2 \mid \psi \rangle$ (Man sagt, dass $\langle \varphi \mid \psi \rangle$ sesquilinear ist.)

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 \mid \psi \rangle &= \overline{\langle \psi \mid c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 \rangle} \\ &= \overline{c_1 \cdot \langle \psi \mid \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \psi \mid \cdot \varphi_2 \rangle} \\ &= c_1^* \cdot \langle \varphi_1 \mid \psi \rangle + c_2^* \cdot \langle \varphi_2 \mid \psi \rangle \end{aligned}$$

(In der Mathematik gibt es oft eine andere Konvention: Linearität im 1. Argument.)

Beispiele:

1. $\mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt $\langle x \mid y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^* \cdot y_i,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \langle x \mid x \rangle = \underbrace{=: \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^* \cdot x_i}_{\|x\|^2} \geq 0$

2. Vektorraum für die auf dem Intervall $[a,b]$ definierten komplexen Polynome mit Grad $\leq n$: $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i x^i,\ q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i x^i,\ c_i, d_i \in \mathbb{C}$; Skalarprodukt: $\langle p \mid q \rangle = \int\limits_a^b p(x)^* \cdot q(x)\ dx$.

3. Vektorraum der komplex-wertigen Funktionen der Form $\psi(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x},\ c_n \in \mathbb{C}$.

   Skalarprodukt: $\langle \psi(x) \mid \varphi(x) \rangle = \int\limits_0^1 \psi(x)^* \cdot \phi(x)\ dx$

4. Vektorraum der komplex-wertigen Funktionen der Form $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot p(x)$ mit $p(x)$ =Polynom mit Grad $\leq N$: $\langle \varphi \mid \psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot p(x)^* \cdot q(x)$

Definition:

- Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$

- Einheitsvektor: $\|v\| = 1$

- Orthogonalität: $\langle x \mid y \rangle = 0$

- ONB: Analog zum euklidischen Fall!

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Beweis analog)
Polarisierungsformel: $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} i^k \cdot \|x + i^k \cdot y\|^2$
Zu Beispiel 3: $e_n := e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot x}$ bilden ONB: $\langle e_n \mid e_m \rangle = \int_0^1 \underbrace{(e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot x})^* \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot x}}_{e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot(n-m)\cdot x}} \, dx = \delta_{nm}$, wobei $\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$

Wir schreiben $\psi = \sum_{m=-N}^{N} c_m e_m$, so folgt $\langle e_n \mid \psi \rangle = \sum_{m=-N}^{N} \langle e_n \mid c_m \cdot e_m \rangle = \sum_{m=-N}^{N} c_m \cdot \delta_{nm} = c_n$. Daher kann c_n einfach über $\langle e_n \mid \psi \rangle$ ausgerechnet werden.

Bemerkung: $\lim_{N\to\infty}$: Fourier-Reihe $\psi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot x}$

2.2 Adjungierte Abbildung

Wir schreiben $\mathscr{U}^n$ für $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt. Sei $A \in L(\mathscr{U}^n, \mathscr{U}^m)$, dann gilt: $A^\dagger = (A^T)^*$ und $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$.
Weiters: $(c_1 \cdot A_1 + c_2 \cdot A_2)^\dagger = c_1^* \cdot A_1^\dagger + c_2^* \cdot A_2^\dagger$ und $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$.
Das Skalarprodukt auf $\mathscr{U}$ führt zur Identifikation $\mathscr{U}^* \cong \mathscr{U}$: Sei $\varphi \in \mathscr{U}$. Dann definiert man $\varphi^\dagger \in \mathscr{U}^*$ durch die Gleichung $\varphi^\dagger \cdot \psi = \langle \varphi \mid \psi \rangle$.
Eigenschaft: $\varphi^{\dagger\dagger} = \varphi$
Definition: Seien $\mathscr{U}, V$ unitäre Vektorräume, und sei $A : \mathscr{U} \to V$ linear. Man definiert $A^\dagger : V \to \mathscr{U}$ durch die Gleichung: $\langle A^\dagger \varphi \mid \psi \rangle_{\mathscr{U}} = \langle \varphi \mid A \cdot \psi \rangle_V$
Bemerkung: (schon gesehen) $\langle a \cdot x + b \cdot y \mid z \rangle = \overline{a} \cdot \langle x \mid z \rangle + \overline{b} \cdot \langle y \mid z \rangle$, weil:
$\langle a \cdot x + b \cdot y \mid z \rangle = \overline{\langle z \mid a \cdot x + b \cdot y \rangle} = \overline{a \cdot \langle z \mid x \rangle + b \cdot \langle z \mid y \rangle} = \overline{a} \cdot \overline{\langle z \mid x \rangle} + \overline{b} \cdot \overline{\langle z \mid y \rangle} = \overline{a} \cdot \langle x \mid z \rangle + \overline{b} \cdot \langle y \mid z \rangle$
Eigenschaften:

1. $(a \cdot A + b \cdot B)^\dagger = \overline{a} \cdot A^\dagger + \overline{b} \cdot B^\dagger$

2. $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$

3. $A^{\dagger\dagger} = A$

Beweis:

1. $\langle (a \cdot A + b \cdot B)^\dagger \cdot x \mid y \rangle = \langle x \mid (a \cdot A + b \cdot B) \cdot y \rangle = a \cdot \langle x \mid A \cdot y \rangle + b \cdot \langle x \mid B \cdot y \rangle = a \cdot \langle A^\dagger \cdot x \mid y \rangle + b \cdot \langle B^\dagger \cdot x \mid y \rangle = \langle \overline{a} \cdot A^\dagger \cdot x \mid y \rangle + \langle \overline{b} \cdot B^\dagger \cdot x \mid y \rangle = \langle (\overline{a} \cdot A^\dagger + \overline{b} \cdot B^\dagger) \cdot x \mid y \rangle \ \forall\, x, y \Longrightarrow (a \cdot A + b \cdot B)^\dagger = \overline{a} \cdot A^\dagger + \overline{b} \cdot B^\dagger$

2. $\langle (A \cdot B)^\dagger \cdot x \mid y \rangle = \langle x \mid A \cdot B \cdot y \rangle = \langle A^\dagger \cdot x \mid B \cdot y \rangle = \langle B^\dagger \cdot A^\dagger \cdot x \mid y \rangle \ \forall\, x, y \Longrightarrow (A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$

3. $\langle A^{\dagger\dagger} \cdot x \mid y \rangle = \langle (A^\dagger)^\dagger \cdot x \mid y \rangle = \langle x \mid A^\dagger \cdot y \rangle = \overline{\langle A^\dagger \cdot y \mid x \rangle} = \overline{\langle y \mid A \cdot x \rangle} = \overline{\overline{\langle A \cdot x \mid y \rangle}} = \langle A \cdot x \mid y \rangle \ \forall\, x, y \Longrightarrow A^{\dagger\dagger} = A$

2.3 Orthonormalbasis

Satz (Gram-Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren): Sei $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein Unitärraum , sei $n = \dim E$. Es existiert eine orthonormale Basis $\{f_i\}_{i=1}^n : \langle f_i \mid f_j \rangle = \delta_{ij}$.

Es gilt: Schreiben wir $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i,\ x_i \in \mathbb{C}$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot f_i,\ y_i \in \mathbb{C}$, dann ist $\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i$.

2.4 Orthogonalität, Projektionsoperatoren

Definition: Sei Ω eine Untermenge von E und sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein sesquilineares Produkt. Dann wird $\Omega^{\perp}$ folgendermaßen definiert:
$\Omega^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x \mid y \rangle = 0 \ \ \forall \ y \in \Omega\}$

Eigenschaften:

1. $\{0\}^{\perp} = E$
2. $E^{\perp} = \{0\}$
3. $\Omega \cap \Omega^{\perp} \subset \{0\}$
4. $\Omega^{\perp}$ ist ein Vektorraum
5. $A \subset B$ dann $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
6. $\Omega^{\perp} = \mathrm{Vect}(\Omega)^{\perp}$ mit $\mathrm{Vect}(\Omega) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{C},\ x_i \in \Omega\}$

Beweis:

1. Klar.
2. $x \in E^{\perp} \Longleftrightarrow \langle x \mid y \rangle = 0 \ \forall \ y \in E^{\perp}$. Setzen wir $y = x \Longrightarrow \langle x \mid x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$
3. Nehmen wir an, dass $\Omega \cap \Omega^{\perp} \neq \emptyset$, so existiert $x \in \Omega \cap \Omega^{\perp}$. Dann $\langle \underbrace{x}_{\in \Omega} \mid \underbrace{x}_{\in \Omega^{\perp}} \rangle = 0$ und somit $x = 0$.
4. Seien $x, y \in \Omega^{\perp},\ z \in \Omega$, dann ist $\langle a \cdot x + b \cdot y \mid z \rangle = \overline{a} \cdot \langle x \mid z \rangle + \overline{b} \cdot \langle y \mid z \rangle = 0$, also ist $a \cdot x + b \cdot y \in \Omega^{\perp}$
5. $x \in B^{\perp} \Longrightarrow \langle x \mid y \rangle = 0 \ \forall \ y \in B$. Falls $A \subset B$, dann gilt $\langle x \mid y \rangle = 0 \ \forall y \in A \Longrightarrow x \in A^{\perp}$
6. $\Omega \subset \mathrm{Vect}(\Omega)$, und somit $\Omega^{\perp} \supset \mathrm{Vect}(\Omega)^{\perp}$ wegen 4. Umgekehrt, sei $x \in \Omega^{\perp}$, dann ist $\langle x \mid y \rangle = 0$ für alle $y \in \Omega$. Sei $z \in \mathrm{Vect}(\Omega)$, dann existieren $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und $y_i \in \Omega$ so dass $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$. Es folgt, dass
$$\langle x \mid z \rangle = \langle x \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle x \mid y_i \rangle}_{=0} = 0\,.$$
Daher gilt auch $\Omega^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(\Omega)^{\perp}$ und somit $\Omega^{\perp} = \mathrm{Vect}(\Omega)^{\perp}$. □

Definition: P ist ein Projektionsoperator, wenn $P \in L(E)$ und $P^2 = P$ ist. P ist ein orthogonaler Projektionsoperator, wenn $P^2 = P$ und $P^{\dagger} = P$.

Eigenschaften: Sei P ein Projektionsoperator. Dann gilt:

1. Sei $x \in \mathrm{Bild}(P) = \{x : x = P \cdot y,\ y \in E\}$, dann ist $P \cdot x = x$. Schreibweise: $P\,|_{\mathrm{Bild}(P)} = Id\,|_{\mathrm{Bild}(P)}$
2. Wenn zusätzlich $P = P^{\dagger}$, dann gilt
   (a) $\ker P \perp \mathrm{Bild}(P)$ mit $\ker P = \{x \mid P \cdot x = 0\}$ und
   (b) $(x - P \cdot x) \perp P \cdot x$

Beweis:

1. $x \in \mathrm{Bild}(P) \Rightarrow \ \exists \ y \in E$, so dass $x = P \cdot y$, dann gilt $P \cdot x = P \cdot (P \cdot y) = P^2 \cdot y = P \cdot y = x$

2. (a) Sei $x \in \ker P \Longleftrightarrow P \cdot x = 0$. Sei weiter $y \in \text{Bild}(P) \Longleftrightarrow \exists\, z : y = P \cdot z$. Dann gilt

   $\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid P \cdot z \rangle = \langle P^\dagger \cdot x \mid z \rangle = \langle P \cdot x \mid z \rangle = 0$

   (b) $P \cdot (x - P \cdot x) = P \cdot x - P^2 \cdot x = 0$. Damit ist $x - P \cdot x \in \ker P$. Aber Px ist in Bild(P), und somit folgt von 1. dass $(x - P \cdot x) \perp P \cdot x$.

$\square$

Satz: Sei P ein orthogonaler Projektionsoperator mit $P : E \to E$. Dann lässt sich jedes $x \in E$ eindeutig schreiben als $x = y + z$, mit $y \in P(E)$ und $z \in P(E)^\perp$.

Beweis: Wir setzen $z := x - P(x),\ y := P(x)$, dann ist $x = y + z$ und $z \in \ker P = \{x \mid P \cdot x = 0\}$, $z \perp y$.

Eindeutigkeit: Nehmen wir an, dass $x = \begin{matrix} y_1 + z_1,\ y_1 \in P(E),\ z_1 \in P(E)^\perp \\ y_2 + z_2,\ y_2 \in P(E),\ z_2 \in P(E)^\perp \end{matrix} \Longrightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Wir wissen, dass $\Omega \cap \Omega^\perp \subset \{0\}$ ist, also gilt $y_1 - y_2 = 0 = z_2 - z_1 \Longrightarrow y_1 = y_2$ und $z_1 = z_2$. $\square$

Man sagt, dass $P(E)$ und $P(E)^\perp$ eine direkte Summe bilden.

Wie kann man orthogonale Projektionsoperatoren bilden?

Seien $\dim E < \infty$, V ein Unterraum (d.h. $V \subset E$ und V ist ein Vektorraum) und $\{f_i\}_{i=1}^k$ eine Basis von V. Dann gilt:

Satz: $P(x) := \sum\limits_{i=1}^{k} \langle f_i \mid x \rangle \cdot f_i$ ist ein orthogonaler Projektionsoperator auf V.

Beweis: z.z.: Für $P(x)$ gilt folgendes: (a) $P^2 = P$ (b) $P^\dagger = P$ (c) $\text{Bild}(P) = V$

(a) $P(f_j) = \sum\limits_{i=1}^{k} \underbrace{\langle f_i \mid f_j \rangle}_{\delta_{ij}} \cdot f_i = f_j$

$$P^2(x) = P(P(x)) = P(\sum_{i=1}^{k} \langle f_i \mid x \rangle \cdot f_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \langle f_i \mid x \rangle \cdot \underbrace{P(f_i)}_{=f_i}}_{=P(x)} \quad \forall\, x \Longrightarrow P^2 = P$$

(b) $\langle y \mid P(x) \rangle = \langle y \mid \sum\limits_{i=1}^{k} \langle f_i \mid x \rangle \cdot f_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle f_i \mid x \rangle \cdot \langle y \mid f_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\langle f_i \mid y \rangle} \cdot \langle f_i \mid x \rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{k} \langle f_i \mid y \rangle \cdot f_i \mid x \rangle = \langle P(y) \mid x \rangle \ \ \forall\, x, y \Longrightarrow P = P^\dagger$

(c) trivial. $\square$

2.5 Hermitesche Operatoren

Definition: Ein Operator $A \in L(E)$, wobei $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit einem sesquilinearem Skalarprodukt ist, ist *hermitesch*, oder *selbstadjungiert*, wenn $A = A^\dagger$.

Beispiele:

(1) Identitätsmatrix

(2) Alle Projektionsoperatoren

(3) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}$

(4) Sei E der Raum von 1-periodischen C^∞ komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei $A(f) = i \cdot \frac{df}{dx}$ und $\langle f \mid g \rangle = \int\limits_0^1 \overline{f(x)} \cdot g(x)\, dx$.

Dann gilt: $\langle f \mid A \cdot g \rangle = \int\limits_0^1 \overline{f} \cdot i \cdot \frac{dg}{dx}\, dx = i \cdot \underbrace{\overline{f} \cdot g \,|_0^1}_{=0 \text{ wegen Periodizität}} - i \cdot \int\limits_0^1 \frac{d\overline{f}}{dx} \cdot g\, dx = \int\limits_0^1 \overline{(i \cdot \frac{df}{dx})} \cdot g\, dx = \langle A \cdot f \mid g \rangle$

Definition:

1. Sei $E_\lambda = \{x \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Wenn $E_\lambda \neq \{0\}$, dann heißt E_λ Eigenraum von E.

2. Ein Vektor $x \neq 0$ mit der Eigenschaft $A \cdot x = \lambda \cdot x$ ist ein Eigenvektor von A, λ ist der Eigenwert.

Beispiel:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Dann $A \cdot x = \lambda \cdot x$ impliziert $x = \lambda \cdot x$. Wenn wir annhemen, daß $x \neq 0$, folgt $\lambda = 1$. Daher: Alle Vektoren $x \neq 0$ sind Eigenvektoren von Einheitsmatrizen mit Eigenwert 1.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

- $i \cdot \frac{df}{dx} = \lambda \cdot f$, dann $f = A \cdot e^{-i \cdot \lambda \cdot x}$. Man muss aber vorsichtig sein, wenn Randbedingungen verlangt sind (z.B. 2π-Periodizität, dann passen nur $\lambda = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$).

Satz: Sei A hermitesch, dann gilt:

(a) $E_\lambda \neq \{0\} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ (alle Eigenwerte von A gehören zu $\mathbb{R}$)

(b) E_λ ist ein Unterraum

(c) $\lambda \neq \mu \Longrightarrow E_\lambda \perp E_\mu$

Beweis:

(a) $E_\lambda \neq \{0\} \Longrightarrow \exists x \in E_\lambda,\ x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$. Dann:
$\langle x \mid A \cdot x\rangle = \langle x \mid \lambda \cdot x\rangle = \lambda \cdot \langle x \mid x\rangle$ und $\langle A^\dagger \cdot x \mid x\rangle = \langle A \cdot x \mid x\rangle = \langle \lambda \cdot x \mid x\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle x \mid x\rangle \Longrightarrow \lambda \cdot \|x\|^2 = \overline{\lambda} \cdot \|x\|^2$ und $x \neq 0 \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

(b) Seien $x, y \in E_\lambda$, dann $A \cdot x = \lambda \cdot x,\ A \cdot y = \lambda \cdot y$. Es folgt, für alle $a, b \in \mathbb{C}$:
$A \cdot (a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot A \cdot x + b \cdot A \cdot y = \lambda \cdot (a \cdot x + b \cdot y)$, d.h. $a \cdot x + b \cdot y \in E_\lambda$.

(c) Sei $x \neq 0$ in E_λ, also $A \cdot x = \lambda \cdot x$. Sei $y \neq 0$ in E_μ, dann $A \cdot y = \mu \cdot y$. Es folgt:
$\langle x \mid A \cdot y\rangle = \langle x \mid \mu \cdot y\rangle = \mu\langle x \mid y\rangle$. Die linke Seite können wir schreiben als
$\langle A^\dagger \cdot x \mid y\rangle = \langle A \cdot x \mid y\rangle = \langle \lambda \cdot x \mid y\rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle x \mid y\rangle = \lambda \cdot \langle x \mid y\rangle \Rightarrow \mu \cdot \langle x \mid y\rangle = \lambda \cdot \langle x \mid y\rangle$. Also ist $(\mu - \lambda) \cdot \langle x \mid y\rangle = 0$. Wenn $\mu \neq \lambda$ schließen wir daraus, dass $\langle x \mid y\rangle = 0$. □

2.6 Unitäre Operatoren

Definition: Sei $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit einem sesquilinearen Skalarprodukt. Ein Operator $U \in L(E)$ heißt unitär, falls U invertierbar ist mit $U^{-1} = U^\dagger$. Anders gesagt, $U \cdot U^\dagger = Id$.

Satz: Sei $U \in L(E)$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. U ist unitär.

2. $\langle U \cdot \varphi \mid U \cdot \psi\rangle = \langle \varphi \mid \psi\rangle \ \ \forall\ \varphi, \psi \in E$.

3. $\|U \cdot \varphi\| = \|\varphi\| \ \ \forall\ \varphi \in E$.

4. U bildet jede ONB von E wieder auf eine ONB ab.

Beweis:

$1 \Longleftrightarrow 2$ folgt von $\langle U\cdot\varphi \mid U\cdot\psi\rangle = \langle U^\dagger\cdot U\cdot\varphi \mid \psi\rangle = \langle\varphi\mid\psi\rangle$.

$2 \Longleftrightarrow 3$ folgt von der Polarisierungsidentität $\langle\varphi\mid\psi\rangle = \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{4} i^k\cdot\|\varphi + i^k\cdot\psi\|^2$.

$2 \Longrightarrow 4$ Sei $\{f_k\}_{k=1}^n$ eine ONB und $b_k = U\cdot f_k$, dann ist $\langle b_k \mid b_l\rangle = \langle U\cdot f_k \mid U\cdot f_l\rangle = \langle f_k \mid f_l\rangle = \delta_{kl}$. Somit ist $\{b_k\}$ ein normiertes Orthogonalsystem und, da $n = \dim E$, folgt, dass $\{b_k\}$ eine Basis ist.

$4 \Longrightarrow 2$ Sei $\{f_k\}_{k=1}^n$ eine ONB, $b_k = U\cdot f_k$ und $x, y\in E$, dann ist $x = \sum_{k=1}^n x_k\cdot f_k$, $y = \sum_{l=1}^n y_l\cdot f_l$ und $\langle x\mid y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x}_k\cdot y_k$. Wir haben:
$\langle U\cdot x \mid U\cdot y\rangle = \langle U\cdot(\sum_{k=1}^n x_k\cdot f_k) \mid U\cdot(\sum_{l=1}^n y_l\cdot f_l)\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x}_k\cdot\langle U\cdot f_k \mid U\cdot(\sum_{l=1}^n y_l\cdot f_l)\rangle = \sum_{k=1,\, l=1}^n \overline{x}_k\cdot y_l\cdot\underbrace{\langle U\cdot f_k \mid U\cdot f_l\rangle}_{\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^n \overline{x}_k\cdot y_k = \langle x\mid y\rangle$, somit gilt $\langle U\cdot x \mid U\cdot y\rangle = \langle x\mid y\rangle \ \ \forall\, x, y$ □

Eigenschaften:

1. Sei U unitär, und sei (U_{ij}) die Matrix von U in einer ONB $\Longrightarrow |\det(U_{ij})| = 1$
   Beweis: $U^\dagger\cdot U = Id \Longrightarrow \det(U^\dagger_{ij})\cdot\det(U_{ij}) = \det(Id_{ij}) = 1$, wobei $\det(U^\dagger_{ij}) = \overline{\det(U_{ij})} \Longrightarrow \overline{\det(U_{ij})}\cdot\det(U_{ij}) = 1$
   $\Longrightarrow |\det(U_{ij})| = 1$.

2. U_1, U_2 unitär $\Longrightarrow U_1\cdot U_2$ unitär
   Beweis: $(U_1\cdot U_2)^{-1} = U_2^{-1}\cdot U_1^{-1} = U_2^\dagger\cdot U_1^\dagger = (U_1\cdot U_2)^\dagger$.

3. U unitär $\Longrightarrow U^{-1}$ unitär
   Beweis: $\|U\cdot\varphi\| = \|\varphi\| \Longleftrightarrow \|U^{-1}\cdot\psi\| = \|\psi\|$ mit $\psi = U^{-1}\cdot\varphi$. □

Aus 1. und 2. folgt, dass unitäre Abbildungen Gruppen bilden. In Dimension n schreibt man $U(n) =$ für die Gruppe der unitären Abbildungen und $SU(n) = \{U\in U(n) \mid \det(U_{ij}) = 1\}$.

2.7 Normale Operatoren

Definition: Sei $(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ein Vektorraum mit einem sesquilinearen Skalarprodukt. Ein Operator $A\in L(E)$ heißt normal, wenn $[A, A^\dagger] = 0$ mit $[A, B] := A\cdot B - B\cdot A$. Man sagt, dass A und $A^\dagger$ vertauschen, oder kommutieren.

Beispiele:

1. Hermitesche und unitäre Operatoren sind normal:
   Sei A hermitesch, dann ist $[A, A^\dagger] = [A, A] = A\cdot A - A\cdot A = 0$.
   Sei U unitär, dann gilt $[U, U^\dagger] = [U, U^{-1}] = U\cdot U^{-1} - U^{-1}\cdot U = Id - Id = 0$.

2. $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $A^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \overline{\lambda_2} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$, $A\cdot A^\dagger = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & |\lambda_2|^2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \vdots & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix} = A^\dagger\cdot A \Longrightarrow [A, A^\dagger] = 0 \Longrightarrow A$ normal

3. Gegenbeispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A\cdot A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A^\dagger\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq A\cdot A^\dagger$

4. Sei $A\in L(E)$, $A_1 = \frac{1}{2}\cdot(A + A^\dagger)$, $A_2 = \frac{1}{2\cdot i}\cdot(A - A^\dagger)$. Dann $A_1^\dagger = A_1$, $A_2^\dagger = \overline{\frac{1}{2i}}\cdot(A - A^\dagger)^\dagger = A_2$ und $A_1 + i\cdot A_2 = \frac{1}{2}\cdot(A + A^\dagger) + \frac{1}{2\cdot i}\cdot(A - A^\dagger) = A$.
   Jedes A lässt sich demnach schreiben als $A = A_1 + i\cdot A_2$, wobei A_1 und A_2 hermitesch sind.

Satz: ($A = A_1 + iA_2$ ist normal mit $A_1 = A_1^\dagger$, $A_2 = A_2^\dagger$) $\Longleftrightarrow [A_1, A_2] = 0$.

Beweis: $[A, A^\dagger] = (A_1 + i\cdot A_2)\cdot(A_1 + i\cdot A_2)^\dagger - (A_1 + i\cdot A_2)^\dagger\cdot(A_1 + i\cdot A_2) = (A_1^2 + i\cdot A_2\cdot A_1 - i\cdot A_1\cdot A_2 + A_2^2) - (A_1^2 - i\cdot A_2\cdot A_1 + i\cdot A_1\cdot A_2 + A_2^2) = 2\cdot i\cdot(A_2\cdot A_2 - A_1\cdot A_2) = -2\cdot i\cdot[A_1, A_2]$ □

2.8 Spektralsatz für normale Operatoren Version 1

Bis zum Ende des Kapitels gilt: E ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $(E, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ist ein unitärer Raum.

Satz: Sei $A \in L(E)$ normal. Dann existiert in E eine ONB von Eigenvektoren.

Bemerkung: Das muss nicht unbedingt wahr sein für normale Operatoren in euklidischen Räumen.

Beweis:

Schritt 1: Sei Spektrum$(A) = \{\lambda \mid \exists\, x \neq 0,\ A\cdot x = \lambda\cdot x\}$ = die Menge von Eigenwerten. Dann ist Spektrum$(A) \neq \emptyset$.

Beweis von Schritt 1: $A\cdot x = \lambda\cdot x,\ x \neq 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda\cdot Id)\cdot x = 0\ \ x \neq 0 \Longleftrightarrow W(\lambda) := \det(A - \lambda\cdot Id) = 0$. Und wir wissen dass in $\mathbb{C}$ die Gleichung $W(\lambda) = 0$ mindestens eine Lösung hat.

Schritt 2: $A\cdot x = \lambda\cdot x \Longrightarrow A^\dagger\cdot x = \overline{\lambda}\cdot x$

Beweis von Schritt 2: $A\cdot x = \lambda\cdot x \Longleftrightarrow (A - \lambda\cdot Id)\cdot x = 0 \Longleftrightarrow (*) := \langle(A - \lambda\cdot Id)\cdot x \mid (A - \lambda\cdot Id)\cdot x\rangle = 0$. Aber: $(*) = \langle(A - \lambda\cdot Id)^\dagger\cdot(A - \lambda\cdot Id)\cdot x \mid x\rangle$. Wenn A normal ist, gilt $(*) = \langle(A - \lambda\cdot Id)\cdot(A^\dagger - \overline{\lambda}\cdot Id)\cdot x \mid x\rangle = \langle(A^\dagger - \overline{\lambda}\cdot Id)\cdot x \mid (A^\dagger - \overline{\lambda}\cdot Id)\cdot x\rangle = \|(A^\dagger - \overline{\lambda}\cdot Id)\cdot x\|^2$. Folglich, wenn x ein Eigenvektor ist, bekommen wir $0 = (A^\dagger - \overline{\lambda}\cdot Id)\cdot x = 0 \Longleftrightarrow A^\dagger\cdot x = \overline{\lambda}\cdot x$

Schritt 3: Sei x ein Eigenvektor von A. Dann bildet A den Unterraum Vect$\{x\}^\perp$ auf Vect$\{x\}^\perp$ ab.

Beweis von Schritt 3: Sei $y \perp x$, dann ist $\langle A\cdot y \mid x\rangle = \langle y \mid A^\dagger\cdot x\rangle = \langle y \mid \overline{\lambda}\cdot x\rangle = \overline{\lambda}\cdot\langle y \mid x\rangle = 0$.

Beweis des Satzes: Sei λ_1 ein Eigenwert (siehe Schritt 1) und φ_1 ein normierter Eigenvektor. Wir haben die Zerlegung $E = \text{Vect}\{\varphi_1\} \oplus E'$ (wir schreiben $E = E_1 \oplus E_2$, wenn sich jedes x eindeutig schreiben lässt als $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in E_1$ und $x_2 \in E_2$) wobei $E' = \text{Vect}\{\varphi_1\}^\perp$ und $A : E' \to E'$ (Schritt 3) ist. Wir benutzen jetzt 1-3 für $A : E' \to E'$ und bekommen eine Zerlegung, bei der $E' = \text{Vect}\{\varphi_2\} \oplus E''$ ist mit $E'' = (\text{Vect}\{\varphi_1\})^\perp$ und φ_2 einem normierten Eigenvektor. Dann ist $E = \text{Vect}\{\varphi_1\} \oplus \text{Vect}\{\varphi_2\} \oplus E''$. Man kann das ganze Verfahren n-Mal wiederholen, mit $n = \dim E$, und bekommt $E = \text{Vect}\{\varphi_1\} \oplus \cdots \oplus \text{Vect}\{\varphi_n\}$, wobei die φ_n's eine ONB bilden. □

2.9 Spektralsatz für normale Operatoren Version 2

Satz: Sei A normal. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und orthogonale Projektionsoperatoren $P_1, \ldots, P_k \in L(E)$, sodass $P_i\cdot P_j = 0$ für $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{k} P_i = Id$, und $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\cdot P_i$.

Beweis: Wir schreiben Spektrum$(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Man definiert P_i = orthogonaler Projektionsoperator auf E_{λ_i}. Dann ist $P_i\cdot P_j = 0\ \ i \neq j \Longleftrightarrow E_i \perp E_j\ \ i \neq j$ (folgt von Schritt 2 und 3); $\sum_{i=1}^{k} P_i = Id \Longleftrightarrow E = \text{Vect}\{\varphi_1\} \oplus \cdots \oplus \text{Vect}\{\varphi_n\}$. Weiters $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\cdot P_i \Longleftrightarrow A\cdot x = \lambda_i\cdot x,\ \ x \in E_i$. □

Korollar: Wir haben die Zerlegung $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_i$, wobei die E_i's Eigenräume von A sind.

Wir sagen, dass $A \in L(E)$ diagonalisierbar ist, wenn eine Basis von E aus Eigenvektoren von A existiert.

Satz: Jede diagonalisierbar Matrix A lässt sich als $A = U\cdot\hat{A}\cdot U^{-1}$. mit $\hat{A}$ diagonal, schreiben.

Beweis: Sei $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren, d.h. $A_i\cdot f_i = \lambda_i\cdot f_i$. Wir setzen $U = [f_1, \ldots, f_n]$ (Matrix mit Spalten = $\{f_i\}$). Sei

$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$ (1 an der i-ten Stelle). Dann ist $U \cdot e_i = f_i$. Das ist äquivalent zu $e_i = U^{-1} \cdot f_i$. Wir rechnen:

$$U^{-1} A \underbrace{U e_i}_{f_i} = U^{-1} \underbrace{A f_i}_{\lambda_i f_i} = \lambda_i \underbrace{U^{-1} f_i}_{e_i} = \lambda_i e_i \, .$$

Daher ist $\hat{A} := U^{-1} A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ diagonal in der Basis $\{e_i\}$, und wir haben $A = U \hat{A} U^{-1}$. □

Korollar: Jede hermitesche Matrix A lässt sich schreiben als $A = U \cdot \hat{A} \cdot U^\dagger$, wobei U unitär und $\hat{A}$ diagonal sind.

Beweis: Im letzten Beweis können die Vektoren $\{f_1, \ldots, f_n\}$ paarweise orthogonal und normiert gewählt werden, dann ist U unitär: $U^{-1} = U^\dagger$. Es folgt $A = U \hat{A} U^{-1} = U \hat{A} U^\dagger$. □

Rezept für Diagonalisierung: Sei $A \in L(E)$. Wir berechnen das *charakteristische Polynom:*

$$W(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot Id) \, .$$

- Wir bestimmen diejenigen λ, die die Gleichung $W(\lambda) = 0$ erfüllen.
- Für jedes solches λ lassen sich Eigenvektoren $\{f_1, \ldots, f_k\}$, $k = k(\lambda)$ finden. Dann:

  1. Wenn die Zahl von linear unabhängigen Eigenvektoren kleiner als die Dimension von E ist, dann ist A *nicht* diagonalisierbar. (Das geschieht leider ziemlich oft, auch für Vektorräume über $\mathbb{C}$, und noch öfter über $\mathbb{R}$.)
  2. Wenn die Dimension der Eigenräume eins ist für alle λ, und die Zahl von verschiedenen Eigenwerten gleich der Dimension von E, dann haben wir eine Basis gefunden.
  3. Wenn $A = A^\dagger$ oder A unitär ist, dann ist A normal, deshalb auch diagonalisierbar. Es folgt, dass die Rechnung sicher zu eine Basis führen wird, die orthogonal gewählt werden kann.
  4. Wenn Normalität nicht offensichtlich ist, und die λ's oder die Eigenvektoren nicht so einfach zu finden sind, kann man $[A, A^\dagger]$ berechnen. Wenn das verschwindet, wissen wir sicher, dass wir prinzipiell eine diagonalisierende Basis bekommen können.

  Wir schreiben $U = [f_1, \ldots, f_n]$, und so haben wir die diagonalisierende Matrix gefunden. Es lohnt sich die f_i normalisiert zu wählen und nachzuprüfen, ob sie paarweise orthogonal sind. Wenn das so ist, dann muss U unitär sein, und die Berechnung von U^{-1} ist trivial.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Hierbei handelt es sich um eine Drehmatrix mit Drehwinkel θ.

In diesem Fall ist $W(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot Id) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0.$

Nullstellen: $(\cos\theta - \lambda)^2 = -\sin^2\theta$. Dieses ist äquivalent zu $\cos\theta - \lambda = \pm i \cdot \sin\theta$. Also $\lambda = \cos\theta \pm i \cdot \sin\theta = e^{\pm i \cdot \theta}$ und $\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = n \cdot \pi$. Dann ist $\cos\theta = \lambda = (-1)^n$.

Auf $\mathbb{R}^2$ existieren die Eigenvektoren nur wenn $\theta = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$! Dann ist A die Identität oder minus die Identität, mit nur einem Eigenwert:

- $\theta = (2\cdot n+1)\cdot\pi \Longrightarrow \lambda = \cos((2\cdot n+1)\cdot\pi) = -1$

- $\theta = 2\cdot n\cdot\pi \Longrightarrow \lambda = \cos(2\cdot n\cdot\pi) = 1$

In diesen Fällen sind alle Vektoren Eigenvektoren, d.h. die Matrix ist schon diagonal und es ist nichts mehr zu tun.

Zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda = e^{\mp i\cdot\theta}$ erhält man wenn $\theta \neq n\cdot\pi$. Wir suchen die Eigenvektoren:
$(A-\lambda\cdot Id)\cdot x = \begin{pmatrix} \cos\theta - e^{\mp i\cdot\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{\mp i\cdot\theta} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} \pm i\cdot\sin\theta & -\sin\theta \\ * & * \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(Wir brauchen die zweite Zeile nicht zu berechnen, weil wir schon wissen, dass die Determinante verschwindet. Wir werden also keine neue Gleichung bekommen.)
Die Eigenvektorgleichung reduziert sich also zu $(\pm i\cdot x+y)\cdot\sin\theta = 0$ und wenn $\sin\theta \neq 0$ finden wir $y = \mp i\cdot x$. Die Eigenvektoren sind demnach $x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$. Wenn man normalisiert, bekommt man zum Beispiel $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}$. Also ist $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, die Diagonalform von A ist $\hat{A} = \begin{pmatrix} e^{-i\cdot\theta} & 0 \\ 0 & e^{+i\cdot\theta} \end{pmatrix}$ und natürlich gilt $A = U\cdot\hat{A}\cdot U^\dagger$.

2.10 Gleichzeitige Diagonalisierbarkeit

Satz: Seien $A, B \in L(E),\ A, B$ normal und $[A, B] = 0$. Dann gibt es eine ONB aus Eigenvektoren für beide Operatoren.
Beweis: Sei E_λ ein Eigenraum für A, sei $0 \neq x \in E_\lambda$, dann ist $A\cdot x = \lambda\cdot x$. Wir haben $A\cdot B\cdot x = B\cdot A\cdot x = B\cdot\lambda\cdot x = \lambda\cdot B\cdot x$. Das zeigt, dass $B\cdot x$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ ist: $B\cdot x \in E_\lambda$. Also ist B eine Abbildung von E_λ nach E_λ. Da B normal ist, existiert eine ONB von E_λ aus Eigenvektoren für B. Das gilt für alle λ. Diese Vektoren sind gleichzeitig Eigenvektoren für A und B. □

Beispiel: In der Quantenmechanik ist der Hamiltonoperator H hermitesch. Also haben wir eine ONB $\{\Psi_\lambda\}$ von Eigenfunktionen $H\cdot\Psi_\lambda = E_\lambda\cdot\Psi_\lambda$ mit E_λ = Energie vom Zustand Ψ_λ. Sei S_Z der Spinoperator entlang der $z-$Achse, dann gilt: $S_z = \frac{\hbar}{2}\cdot\sigma_z$ mit $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\Psi_\lambda = \begin{bmatrix} f_\lambda \\ g_\lambda \end{bmatrix}$. In vielen Fällen gilt $[H, S_z] = 0$. Wenn das so ist, existiert auch eine ONB $\{\Psi_{\lambda,\pm}\}$ mit $H\cdot\Psi_{\lambda,\pm} = E_\lambda\cdot\Psi_{\lambda,\pm}$ und gleichzeitig $S_z\cdot\Psi_{\lambda,\pm} = \pm\frac{\hbar}{2}\cdot\Psi_{\lambda,\pm}$.

2.11 Funktionen von Operatoren

Beispiel: Sei A eine $N\times N$ Matrix und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ in der Form $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{bmatrix}$. Dann ist $f(t) = \exp(t\cdot A)\cdot F$, mit

$$\exp(t\cdot A) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t\cdot A)^n}{n!},$$

die Lösung der Gleichung $\frac{df}{dt} = A\cdot f$ mit der Randbedingung $f(0) = F \in \mathbb{R}^N$.
Beweis: $\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot A^n\cdot F}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\cdot(\frac{t^n\cdot A^n\cdot F}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot f^{n-1}\cdot A^n\cdot F}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}\cdot A\cdot A^{n-1}\cdot F}{(n-1)!} = A\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}\cdot A^{n-1}\cdot F}{(n-1)!} = A\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j\cdot A^j\cdot F}{j!} = A\cdot f(t).$ □

Beispiel: Sei $\hat{A}$ diagonal mit $\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}$. Dann $(t\cdot\hat{A})^n = \begin{bmatrix} (t\cdot\lambda_1)^n & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & (t\cdot\lambda_N)^n \end{bmatrix}$ und somit

$$\exp(t\cdot\hat{A}) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(t\cdot\lambda_1)^n}{n!} & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(t\cdot\lambda_N)^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t\cdot\lambda_1} & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & e^{t\cdot\lambda_N} \end{bmatrix}.$$

Sei A diagonalisierbar, dann ist $A = U\cdot\hat{A}\cdot U^{-1}$, und es gilt:

$A^2 = U\cdot\hat{A}\cdot U^{-1}\cdot U\cdot\hat{A}\cdot U^{-1} = U\cdot(\hat{A})^2\cdot U^{-1}$

$A^3 = U\cdot(\hat{A})^2\cdot U^{-1}\cdot U\cdot\hat{A}\cdot U^{-1} = U\cdot(\hat{A})^3\cdot U^{-1}$ usw.

$A^n = U\cdot\hat{A}^n\cdot U^{-1}$

$\exp(t\cdot A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot A^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot U\cdot\hat{A}^n\cdot U^{-1}}{n!} = U\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\cdot\hat{A}^n}{n!})\cdot U^{-1} = U\cdot\exp(t\cdot\hat{A})\cdot U^{-1}$

Definition: Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und sei A normal, dann setzen wir $f(A) := U\cdot\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & f(\lambda_N)\end{pmatrix}\cdot U^{-1}$ wobei U unitär ist und λ_i die Eigenwerte von A.

Beispiele:

1) $\sin(t\cdot A) = U\cdot\sin(t\cdot\hat{A})\cdot U^{-1}$ mit $\sin(t\cdot\hat{A}) = \begin{bmatrix} \sin(t\cdot\lambda_1) & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \sin(t\cdot\lambda_N)\end{bmatrix}$

2) Wenn alle Eigenwerte von A positiv sind, definiert man $\sqrt{A} = U\cdot\sqrt{\hat{A}}\cdot U^{-1}$, mit $\sqrt{\hat{A}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \sqrt{\lambda_N}\end{bmatrix}$.

Satz: Wenn A normal ist, dann gilt $f(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\lambda_i)\cdot P_i$, wobei die P_i's die orthogonalen Projektionsoperatoren auf E_{λ_i} bezeichnen.

Beispiel: Wir betrachten $A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot P_i$. Dann ist $A^2 = (\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot P_i)\cdot(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\cdot P_j) = \sum\limits_{i,j=1}^{k}\lambda_i\cdot\lambda_j\cdot\underbrace{P_i\cdot P_j}_{=0\text{ für } i\neq j} = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^2\cdot P_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^2\cdot P_i$ (hierfür haben wir $P_i^2 = P_i$ benutzt). In ähnlicher Weise zeigt man dass $A^n = \sum\limits_{i=1}^{k}(\lambda_i)^n\cdot P_i$.

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Grundbegriffe

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDG, oder GD, oder ODE = ordinary differential equation) ist eine Gleichung der Form $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$, wobei x die unabhängige Variable und y die abhängige Variable ist. Wir schreiben $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\dots,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$.

Nicht-Beispiel: Die Laplace Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ist keine ODE sondern eine partielle Differentialgleichung (PDE = partial differential equation), da sie zwei (oder mehr) unabhängige Variablen enthält.

Definition: Die Ordnung einer DG[4] ist die Ordnung der höchsten vorhandenen Ableitung der abhängigen Variable.

Beispiele:

- $m\cdot\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x})$ 3 Gleichungen, System von ODEs

[4] Differentialgleichung

- Radioaktiver Zerfall: $N \geq 0$, $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$; wir schreiben dann $dN = -\lambda \cdot N dt$

  Lösung: 1.Fall: $N \neq 0 \Longrightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int dt \Longrightarrow \ln(N) = -\lambda \cdot t + c$, wobei c eine Konstante ist.

  $N = e^{-\lambda \cdot t + c} = e^c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $N(0) = e^c \cdot e^{-0} = e^c$ $N = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ ist eine ein-parametrige Familie von Lösungen

  2. Fall: $N(t_0) = 0$ dann ist $N(t) = 0$ eine Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$.

- $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{0}$ zweite Ordnung, freie Bewegung

  $\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{x}}{dt}) = \vec{0} \Longrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\alpha}$, wobei $\vec{\alpha}$ ein zeitunabhängiger Vektor ist $\Longrightarrow \vec{x}(t) = \vec{\alpha} \cdot t + \vec{\beta}$.

  Anfangswertproblem: $\vec{x}(0) = \vec{\beta}$, $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{\alpha} \Longrightarrow \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(0) \cdot t + \vec{x}(0)$.

- Konstantes Gravitationsfeld mit Reibung: $m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = -m \cdot g - \lambda \cdot \frac{dz}{dt}$. Wir nehmen $m = 1$, $\lambda = 1$ und $g = 10$ an: $\frac{d^2z}{dt^2} = -10 - \frac{dz}{dt}$.

  Sei $v = \frac{dz}{dt}$, dann ist $\frac{dv}{dt} = -10 - v$, also $dv = (-10 - v)dt$.

  1. $v(0) = -10$. Dann ist $v(t) = -10$ eine Lösung.
  2. $v(0) \neq -10$. Dann gilt $\frac{dv}{10+v} = -dt \Longrightarrow \int \frac{dv}{10+v} = -\int dt \Longrightarrow \ln|10 + v| = -t + c$

  $\Longrightarrow |10 + v| = e^{-t+c} \Longrightarrow 10 + v = \pm e^{-t+c}$, also ist $v = e^{-t} \cdot (10 + v(0)) - 10$.

  Dann gilt $\frac{dz(t)}{dt} = v = e^{-t} \cdot (10 + v(0)) - 10$, und $z(t) = -e^{-t} \cdot (10 + v(0)) - 10 \cdot t + c$. Es folgt $z(0) = -(10 + v(0)) = c \Longrightarrow z(t) = z(0) - 10 \cdot t + (10 + v(0)) \cdot (1 - e^{-t})$.

3.2 Trennung der Variablen

Frage: Wie kann die Gleichung

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

nach y aufgelöst werden?

Antwort: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$, also ist $dy = f(x) \cdot g(y)dx \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ falls $g(y) \neq 0$. Somit gilt $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Sei $G(y)$ gegeben durch $G' = \frac{1}{g}$ und $F(x)$ durch $F' = f$. Wir bekommen

$G(y) = F(x) + c$ und $y = G^{-1}(F(x) + c)$ mit G^{-1} = inverse Funktion zu G, definiert durch $G^{-1}(G(y)) = y$.

Beispiel: $y' = y^2 \cdot x^3$

$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x^3$. Eine Lösung ist $y(x) = 0 \;\; \forall\, x$. Wenn $y(t_0) \neq 0$ bekommen wir $\frac{dy}{y^2} = x^3 dx$. Integration führt auf $-\frac{1}{y} = \frac{x^4}{4} + c \Longrightarrow y = -\frac{1}{c + \frac{x^4}{4}}$.

Beispiel: Der Fall $y' = g(\frac{y}{x})$ lässt sich auf den Fall $y' = f(x) \cdot g(y)$ reduzieren indem man, für $x \neq 0$,

$$u = \frac{y}{x}$$

setzt. Dann gilt $y(x) = x \cdot u(x)$, und somit $y' = x \cdot u' + u = g(\frac{y}{x}) = g(u)$. Auf diese Weise haben wir eine Gleichung $u' = \frac{g(u)-u}{x}$ mit getrennten Variabeln bekommen (Achtung: $x \neq 0$).

Beispiel: $2 \cdot x \cdot y \cdot y' - y^2 + x^2 = 0$. Falls x und $y \neq 0 \Longleftrightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{y}{2 \cdot x} - \frac{x}{2 \cdot y}$. Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ ist äquivalent zu $y = x \cdot u$. Daher ist $y' = u + x \cdot u' = \frac{u}{2} - \frac{1}{2 \cdot u}$, und somit $x \cdot u' = -\frac{u}{2} - \frac{1}{2 \cdot u} = -\frac{u^2+1}{2 \cdot u}$. Man bekommt $\int \frac{2 \cdot u}{1+u^2} du = \int -\frac{1}{x} dx$. Nach Integration erhält man $\ln(1 + u^2) = -\ln|x| + c \Longrightarrow 1 + u^2 = \frac{1}{|x|} \cdot e^c$. Aber $u = \frac{y}{x}$, also ist $1 + (\frac{y}{x})^2 = \frac{e^c}{|x|}$. Das führt zu $x^2 + y^2 = e^c \cdot |x|$, und schließlich zu $y = \pm\sqrt{e^c \cdot |x| - x^2}$, wobei man annehmen muss, dass $e^c \cdot |x| - x^2 \geq 0$.

3.3 Exakte Differentialgleichungen

Wir betrachten Gleichungen der Form $P(x, y) + Q(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. Man schreibt auch $P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = 0$. Die Gleichung ist genau dann exakt, wenn die Intergrabilitäts-Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ gilt.

Satz: Wenn die Intergrabilitäts-Bedingung erfüllt ist, dann existiert lokal immer eine Funktion $\Phi(x, y)$, so daß $P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

Dann definiert die Gleichung $\Phi(x,y)=c$ für jedes c implizit eine Lösung von $P(x,y)+Q(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0$ in dem Gebiet $\{\nabla\Phi=(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y})\neq 0,\ \Phi(x,y)=c\}$.

Beweis: z.z. $\Phi(x,y)=c$ führt zu Lösungen. Wir nehmen eine Funktion $x\mapsto y(x)$, so dass $\Phi(x,y(x))=c\Longrightarrow 0=\frac{dc}{dx}=\frac{d}{dx}(\Phi(x,y(x))=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=P+Q\cdot\frac{dy}{dx}$. □

Beispiel: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y^2}{2\cdot x\cdot y+y}$ mit $2\cdot x\cdot y+y\neq 0$

$(2\cdot x\cdot y+y)\frac{dy}{dx}+x+y^2=0\Longleftrightarrow(x+y^2)dx+(2\cdot x\cdot y+y)dy=0$

Erfüllen $P(x,y)=x+y^2,\ Q(x,y)=2\cdot x\cdot y+y$ die Intergrabilitäts-Bedingung? $\frac{\partial P}{\partial y}=2\cdot y\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=2\cdot y=\frac{\partial P}{\partial y}$ ✓ $\Longrightarrow$ Die Gleichung ist exakt.

Nun muss Φ ermittelt werden: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P=x+y^2\mid\int\Longrightarrow\Phi=\frac{x^2}{2}+x\cdot y^2+F(y)$

$\cancel{2\cdot x\cdot y}+y=Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\cancel{2\cdot x\cdot y}+F'(y)\Longrightarrow F'(y)=y\Longrightarrow F(y)=\frac{y^2}{2}+k,\ k\in\mathbb{R},\ \Phi=\frac{x^2}{2}+x\cdot y^2+\frac{y^2}{2}+k$

Niveaus von $\Phi:\ \frac{x^2}{2}+x\cdot y^2+\frac{y^2}{2}+k=c\Longleftrightarrow x^2+(2\cdot x-1)\cdot y^2=2\cdot(c-k)=A,\ A\in\mathbb{R}$

$y^2=\frac{A-x^2}{2\cdot x+1}$ für $x\neq-\frac{1}{2}$, also ist $y=\pm\sqrt{\frac{A-x^2}{2\cdot x+1}}$ für $\frac{A-x^2}{2\cdot x+1}\geq 0$ und $x\neq-\frac{1}{2}$

Beispiel: $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$, aber $\frac{\partial p}{\partial y}\neq\frac{\partial q}{\partial x}$. **Behauptung:** Man kann lokal immer eine Funktion $\mu(x,y)$ finden, so dass $\mu(x,y)\cdot p(x,y)dx+\mu(x,y)\cdot q(x,y)dy=0$ gilt und die Gleichung exakt ist: $\frac{\partial(\mu(x,y)\cdot p(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)\cdot q(x,y))}{\partial x}$ (ohne Beweis). μ wird als integrierender Faktor bezeichnet.

$(x^2+2\cdot y)dx+(x)dy=0$. Dann ist $\frac{\partial p}{\partial y}=2$ und $\frac{\partial q}{\partial x}=1\Longrightarrow$ nicht exakt, wir müssen ein μ finden:

$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)\cdot p)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)\cdot q)\ \Longrightarrow\ \frac{\partial\mu}{\partial y}(x^2+2\cdot y)+\mu\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}x+\mu\frac{\partial q}{\partial x}$

$\frac{\partial\mu}{\partial y}(x^2+2\cdot y)=x\frac{\partial p}{\partial x}-\mu.$

Anszatz: $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, dann bekommen wir $x\frac{d\mu}{dx}=\mu$ und $\mu=x$

Neue Gleichung mit $x\neq 0:\ (x^3+2\cdot x\cdot y)dx+x^2dy=0$

$P=x^3+2\cdot x\cdot y,\ Q=x^2\ \Longrightarrow\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}=P=x^3+2\cdot x\cdot y\mid\int\Longrightarrow\Phi=\frac{x^4}{4}+y\cdot x^2+F(y)$

$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\cancel{x^2}+F'(y)=Q=\cancel{x^2}\ \Longrightarrow\ F'(y)=0\Longrightarrow F(y)=k,\ k\in\mathbb{R}\Longrightarrow\Phi=\frac{x^4}{4}+y\cdot x^2+k$

$\Phi=c\Longleftrightarrow x^4+4\cdot y\cdot x^2=4\cdot(c-k)=A\Longrightarrow y=\frac{A-x^4}{4\cdot x^2}$ mit $x\neq 0$ und $A\in\mathbb{R}$.

3.4 Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Gleichungen von der Form $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ heißen linear. Wenn $Q(x)=0$, dann ist $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$ homogen und es gilt: $\frac{dy}{dx}=-P(x)\cdot y$ mit $y\neq 0\Longleftrightarrow\frac{1}{y}dy=-P(x)dx\mid\int\Longrightarrow\ln|y|=k-\int\limits_{x_0}^{x}P(s)\,ds\Longrightarrow y=\pm\underbrace{e^k}_{c}\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}$ mit $k,\ c\in\mathbb{R}\Longrightarrow y=c\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}$.

Bei $Q(x)\neq 0$ ist die Gleichung nicht homogen, in diesem Fall wird die Methode der Variation der Konstanten angewandt.

Ansatz:

$$y=c(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}$$

$\Longrightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(c(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds})=c'\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}+\underbrace{c(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}}_{y}\cdot x(-P(x))=-P\cdot y+Q$. Also ist

$c'(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}=Q(x)\Longleftrightarrow c'(x)=Q(x)\cdot e^{+\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}\Longrightarrow c(x)=c(x_0)+\int\limits_{x_0}^{x}Q(t)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(s)\,ds}dt.$

Beispiel: $m\ddot{x}=F(t)-c\cdot\dot{x}$. Wir wählen $m=c=1$ und $F=1$, betrachten also die Gleichung $\ddot{x}=1-\dot{x}$. Wir setzen $v=\dot{x}$. Es folgt, dass $\ddot{x}=1-\dot{x}\Longleftrightarrow\dot{v}=1-v$.

1. Die homogene Gleichung $\dot{v}=-v$

   Integration liefert $\int\frac{1}{v}dv=\int-dt\Longrightarrow v(t)=c\cdot e^{-t}\quad c=const.$

2. $v(t)=c(t)\cdot e^{-t}$

   $\dot{c}\cdot e^{-t}-c\cdot e^{-t}=\dot{v}=1-v=1-c\cdot e^{-t}\Longleftrightarrow\dot{c}\cdot e^{-t}=1\Longleftrightarrow\dot{c}=e^t$, d.h. $c(t)=c(0)+e^t-1$ und damit $v(t)=c(t)\cdot e^{-t}=(c(0)+e^t-1)\cdot e^{-t}=$

$1 + (c(0) - 1) \cdot e^{-t}$

$v(0) = 1 + c(0) - 1 = c(0)$. Da $\dot{x} = v$ folgt, dass $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\, dt = x(0) + t + (v(0) - 1) \cdot (-e^{-t} + 1)$.

3.5 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$\frac{dx}{dt} = A \cdot x$ (homogen) mit $x \in \mathbb{R}^N$ und $A = N \times N$-Matrix $\Longrightarrow x(t) = \exp(A \cdot t) \cdot x(0)$ mit $\exp(A \cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A \cdot t^n)}{n!}$.

3.6 Lineare Systeme höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$a_n \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ ist homogen falls $a_0 = 0$.

Fakt: Lösungen von homogenen linearen Gleichungen bilden einen Vektorraum.

Beweis: Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, sei $y = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$, dann: $a_n \cdot (\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2)^{(n)} + \cdots + a_1 \cdot (\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2)' = a_n \cdot (\alpha \cdot y_1^{(n)} + \beta \cdot y_2^{(n)}) + \cdots + a_1 \cdot (\alpha \cdot y_1' + \beta \cdot y_2') = \alpha \cdot (a_n \cdot y_1^n + \cdots + a_1 \cdot y_1') + \beta \cdot (a_n \cdot y_2^n + \cdots + a_1 \cdot y_2') = 0$. □

Lösungen von $a_n \cdot y^n + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$: Wir nehmen den Ansatz $y = A \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $A,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

$y' = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot x},\ y'' = \lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n \cdot A \cdot e^{\lambda \cdot x} \Longrightarrow A \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot (a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0) = 0 = W(\lambda) =$ charakteristisches Polynom, jede Nullstelle von W entspricht einer Lösung.

Allgemein: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ Lösungen von $W(\lambda) = 0$, dann ist $\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$ eine Lösung von $a_n \cdot y^n + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$. Das sind alle Lösungen, wenn λ_i einfache Nullstellen von W sind. Wenn $a_n \neq 0$ dann gilt: $W(\lambda) = a_n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_N)^{m_N}$ mit $m_i =$ Vielfachheit von λ_i und $\lambda_i \neq \lambda_j\ \ i \neq j$. Es gilt: Einfache Nullstelle $\lambda_i \Longleftrightarrow m_i = 1$.

Allgemeine Lösungen: $y = \sum_{i=1}^{N} P_i(x) \cdot e^{\lambda_i \cdot x}$, wobei P_i ein Polynom von der Ordnung m_{i-1} ist.

Beispiel:

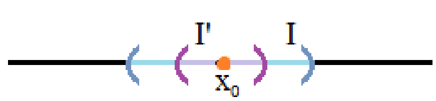
a) $y'' - y = 0$. Charakteristisches Polynom $\lambda^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$, also nur einfache Nullstellen $\Longrightarrow y(x) = A \cdot e^x + B \cdot e^{-x}$.

b) $y'' + y = 0$. Hier haben wir $W(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Longleftrightarrow \lambda = \pm i$, also zwei einfache Nullstellen $\Longrightarrow y = A \cdot e^{i \cdot x} + B \cdot e^{-i \cdot x}$.
Reelle Lösungen: $e^{\pm i \cdot x} = \cos(x) \pm i \cdot \sin(x) \Longrightarrow y = A \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) + B \cdot (\cos(x) - i \cdot \sin(x)) = (A+B) \cdot \cos(x) + i \cdot (A-B) \cdot \sin(x) = \alpha \cdot \cos(x) + \beta \cdot \sin(x)$ mit $\alpha,\ \beta$ Konstanten.

c) $y'' + 2 \cdot y' + y = 0$. Charakteristisches Polynom $\lambda^2 + 2 \cdot \lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$. Hier haben wir also die Vielfachheit 2, $y = A \cdot x \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-x}$.
Probe: $y' = A \cdot (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) - B \cdot e^{-x},\ y'' = A \cdot (-e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x}) + B \cdot e^{-x} \Longrightarrow y'' + 2 \cdot y' + y = A \cdot (-2 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot x \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}) + B \cdot (e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + e^{-x}) = 0$

3.7 Existenz und Eindeutigkeit

Satz von Peano: Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ stetig. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$, wobei $(x_0, y_0) \in \Omega$ und $y \in \mathbb{R}^N$. Es existiert ein Intervall $I' \subset I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I',\ I' \subset I$ und mindestens eine Lösung $I \ni x \to y(x) \in \mathbb{R}^N$ von $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$.



Definition: Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist offen, wenn $\forall\ x \in \Omega\ \exists\ r > 0$, so dass $B(x, r) \subset \Omega$, wobei $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|x - y\| < r\}$.

Beispiele:

(a) $x \cdot y' = y$ mit $y(0) = 1$. Es gibt keine Lösungen.

(b) $x \cdot y' = y$ mit $y(0) = 0$. Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist $y = k \cdot x$ eine Lösung: $y' = k$ und somit $x \cdot y' = k \cdot x = y$. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

(c) $y' = \sqrt{|y|}$ mit $y(0) = 0$. Hier ist $F(y) = \sqrt{|y|}$. Ansatz: Für $x \geq 0$ setzen wir $y(x) = A \cdot x^{\alpha}$ mit $A > 0$.
1. Lösung: $y(x) = 0 \;\; \forall \; x$.
$y' = \alpha \cdot A \cdot x^{\alpha-1}$, $\sqrt{y} = \sqrt{A} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}}$ und die GDG ist genau dann erfüllt wenn $\frac{\alpha}{2} = \alpha - 1$ und $\sqrt{A} = A \cdot \alpha \Longrightarrow \alpha = 2$ und $A = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$
2. Lösung: $y(x) = \frac{x^2}{4}$, die ebenfalls $y(0) = 0$ erfüllt.
3. Dazu hat man aber auch eine Ein-Parameter-Familie von Lösungen: Sei $a > 0$:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{(x-a)^2}{4}, & x \geq a. \end{cases}$$

Definition: F ist Lipschitz-stetig bezüglich y, wenn ein $M \geq 0$ existiert, so dass $\forall \; (x,y),(x,z) \in \Omega \;\; \|F(x,y) - F(x,z)\| \leq M \cdot \|y - z\|$. Diese Gleichung heißt Lipschitz-Bedingung.

Beispiele:

(a) $\mathbb{R}^N \ni y \to F(y) = y \in \mathbb{R}^N$ ist Lipschitz-stetig.

(b) Wir betrachten nun $\mathbb{R} \supset \Omega \ni y \to F(y) = y^2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$|F(y) - F(z)| = |y^2 - z^2| = |(y-z) \cdot (y+z)| = |y - z| \cdot \underbrace{|y+z|}_{\leq M?}$.
Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist $|y+z|$ unbegrenzt $\Longrightarrow$ es existiert kein M, so dass $|F(y) - F(z)| \leq M \cdot |y - z|$. Aber wenn ein R existiert, so dass $\Omega \subset [-R, +R]$, dann ist $|y+z| \leq 2 \cdot R$ und $|F(y) - F(z)| \leq \underbrace{2 \cdot R}_{M = 2 \cdot R} \cdot |y - z|$.

(c) Für $F(y) = \sqrt{y}$ mit $y \geq 0$ gilt $|F(y) - F(z)| = |\sqrt{y} - \sqrt{z}| = |\frac{(\sqrt{y}-\sqrt{z}) \cdot (\sqrt{y}+\sqrt{z})}{(\sqrt{y}+\sqrt{z})|} = \frac{|y-z|}{|\sqrt{y}-\sqrt{z}|} \leq \underbrace{M \cdot |y - z|}_{M=?}$.
Wenn $\Omega = [0, \infty)$, dann existiert kein M weil $\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ beliebig groß sein kann. Aber wenn $\epsilon > 0$ existiert, so dass $\Omega \cap [0, \epsilon) = \emptyset$, dann gilt für $y \geq \epsilon$, dass $\sqrt{y} \geq \sqrt{\epsilon}$ und somit $\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = M$.

Satz: Sei $\Omega = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^N$ und sei F differenzierbar mit $|\nabla F| \leq M$, dann ist F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante M.

Beweis: $\Omega \subset \mathbb{R} \; |F(y) - F(z)| = |\int_z^y F'(x) dx| \leq \sup F' \cdot |\int_z^y dx| = M \cdot |y - z|$ □

Satz von Cauchy-Lipschitz: Die Lösungen wie im Peano-Satz sind eindeutig, wenn F bezüglich y Lipschtiz-stetig ist: also, wenn ein $M > 0$ existiert so dass

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2| \, .$$

4 Komplexe Analysis

4.1 Komplexe Zahlen

Definition: $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist definiert als $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt

$$(x, y) \cdot (a, b) = (x \cdot a - y \cdot b, x \cdot b + y \cdot a) \, , \quad x, y, a, b \in \mathbb{R} \, .$$

Man schreibt $i = (0,1)$, $1 = (1,0)$.

Beispiel: $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$.

Eigenschaft: $(x,y)\cdot(a,b)=(a,b)\cdot(x,y) \rightsquigarrow$ Die Multiplikation ist kommutativ.

Definition: Sei $z=x+i\cdot y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$, (diese Gleichung ist äquivalent zu $x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)=(x,y)$). Man definiert $z^*:=x-i\cdot y$ (konjugiert) und $\mid z\mid := \sqrt{x^2+y^2}$ (Betrag von z). Man schreibt auch $\bar{z}$ für z^*.

Eigenschaften:

- $z\cdot z^* = \mid z\mid^2$.

  Es folgt, dass für $z\neq 0$ das Inverse $z^{-1}\equiv\frac{1}{z}$ bzgl. des Produkts in $\mathbb{C}$ existiert: $z^{-1}=\frac{z^*}{|z|^2}$.

- Sei $z\neq 0$, wir haben $z=\mid z\mid\cdot\frac{z}{|z|}$ mit der Norm von $\frac{z}{|z|}=1$. Es folgt, dass ein φ existiert, so dass $\frac{z}{|z|}=(\cos\varphi,\sin\varphi)=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi\equiv e^{i\cdot\varphi}$.

Man schreibt $\mid z\mid = r \Longrightarrow z=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$.

4.2 Komplexe Funktionen

Im gesamten Kapitel gilt $z=x+i\cdot y$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Definition: $e^z\equiv e^{x+i\cdot y}:=e^x\cdot(\cos(y)+i\cdot\sin(y))$.

Beispiele:

(a) $e^{x+i\cdot 0}=e^x$.

(b) $e^i=e^{0+i}=e^0\cdot(\cos(1)+i\cdot\sin(1))$.

(c) $e^{i\cdot z}=e^{i\cdot(x+i\cdot y)}=e^{i\cdot x-y}=e^{-y}\cdot(\cos(x)+i\cdot\sin(x))$.

Eigenschaft: In $\mathbb{R}$ mit $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}:\ e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}$. In $\mathbb{C}$ gilt die analoge Relation $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

Eigenschaft: $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ und die Summe konvergiert absolut für alle $z\in\mathbb{C}$.

Definition: $\sin(z):=\frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$, $\cos(z):=\frac{e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}}{2}$, $\sinh(z):=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$.

Bemerkung: Für $x\in\mathbb{R}$ kann man sin und cos als Reihe definieren: $\sin(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2\cdot k+1}\cdot(-1)^k}{(2\cdot k+1)!}$, $\cos(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2\cdot k}\cdot(-1)^k}{(2\cdot k)!}$, dies gilt auch für komplexe Zahlen.

Beispiel: $z=3+2\cdot i$.

$\sin(3+2\cdot i)=\frac{e^{i\cdot(3+2\cdot i)}-e^{-i\cdot(3+2\cdot i)}}{2\cdot i}=\frac{(e^{-2+3\cdot i}-e^{2-3\cdot i})}{2}\cdot(-i)=\frac{e^{-2}\cdot(\cos(3)+i\cdot\sin(3))-e^2\cdot(\cos(3)(=\cos(-3))-i\cdot\sin(3)(=-\sin(-3)))}{2}\cdot(-i)=(\underbrace{\frac{e^{-2}-e^2}{2}}_{-\sinh(2)}\cdot\cos(3)+i\cdot(\underbrace{\frac{e^{-2}+e^2}{2}}_{\cosh(2)})\cdot\sin(3))\cdot(-i)=\cosh(2)\cdot\sin(3)+i\cdot\sinh(2)\cdot\cos(3)$.

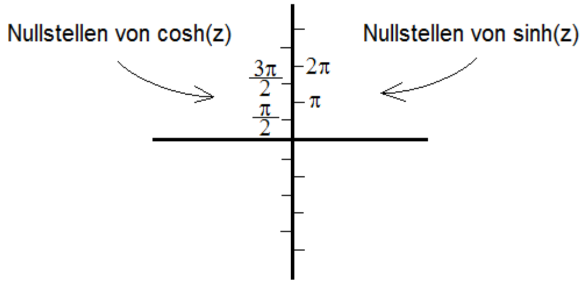
Eigenschaften:

- $\sin(i\cdot z)=(\underbrace{\frac{e^{-z}-e^z}{2}}_{-\sinh(z)})\cdot(-i)=i\cdot\sinh(z)$,

- $\cos(i\cdot z)=\cosh(z)$,

- $n\in\mathbb{Z},\ \sinh(i\cdot n\cdot\pi)=(-i)\cdot\sin(-n\cdot\pi)=0$,

- $n\in\mathbb{Z},\ \cosh(i\cdot(n\cdot\pi+\frac{\pi}{2}))=\cos(-(n\cdot\pi+\frac{\pi}{2}))=0$.



4.3 Arg(z), log(z)

Definition: Wenn $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, $r, \varphi \in \mathbb{R}$, dann sagen wir, dass φ das Argument von z ist. Man schreibt $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$.

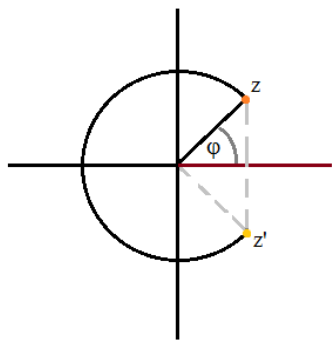
Achtung: Sei $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$, dann ist $\forall\ n \in \mathbb{Z}\ \ \varphi + 2 \cdot n \cdot \pi$ auch ein Argument.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, wobei $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und nehmen wir an, dass $\operatorname{Arg}(z)$ definiert und stetig auf Ω ist. Dann definiert die Gleichung $\log(z) := \log|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z)$ einen Zweig des Logarithmus.

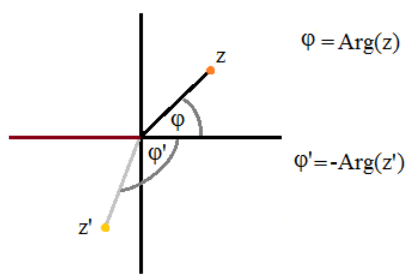
Bemerkung: Sei $\log(z)$ ein Zweig des Logarithmus, dann ist $\log(z) + 2 \cdot i \cdot n \cdot \pi$ auch ein Zweig des Logarithmus für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Beispiele:

(a) $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+ = \mathbb{C}\setminus\{x + i \cdot y \mid y = 0 \wedge x \geq 0\}$. Hier ist $\operatorname{Arg}(z) \in (0, 2\pi)$. Mit dieser Wahl ist $\log(-1)$ definiert und gleicht $-\pi \cdot i$, wohingegen $\log(1)$ nicht definiert ist.



(b) $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- = \mathbb{C}\setminus\{x + i \cdot y \mid y = 0 \wedge x \leq 0\}$, $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, +\pi)$.



Mit dieser Wahl nennt man $\log(z) = \log|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z)$ den Hauptzweig des Logarithmus. Hier ist $\log(-1)$ *nicht* definiert, aber $\log(1)$ ist definiert und ist gleich 0.

(c) Sei $f(z) = \log(z - i)$ der Hauptzweig des Logarithmus. Dann ist f nur für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x + i\ ,\ x < 0\}$ definiert. Siehe Abbildung 1.

Bemerkungen:

(a) $\log(0)$ existiert nie.

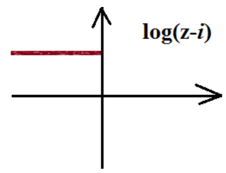


Abbildung 1: Definitionsbereich von $\log(z-i)$, wobei log der Hauptzweig des Logarithmus ist.

(b) Es gibt keinen Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$.

(c) Sei log ein Zweig des Logarithmus auf Ω, dann gilt $e^{\log(z)} = z$ für $z \in \Omega$.

(d) Sei Ω zusammenhängend und sei log ein Zweig des Logarithmus auf Ω, dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ so dass $\log(e^z) = z + 2 \cdot n \cdot \pi \cdot i$:

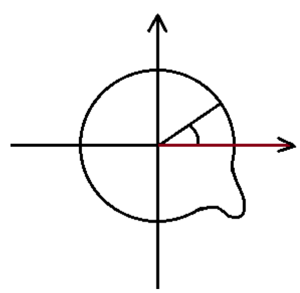
$$\log(e^z) = \log\big(e^x(\cos y + i \cdot \sin y)\big) = x + i \cdot y + i \cdot 2 \cdot n \cdot \pi\,.$$

Nächste Funktion: z^c, mit $c \in \mathbb{C}$:

- Für $c = n \in \mathbb{N}$ definiert man $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ Faktoren}}$.
- Für $c = n \in -\mathbb{N}$ (d.h. $n = -m$ mit $m \in \mathbb{N}$) und $z \neq 0$ setzen wir $z^n := (\frac{1}{z})^{|n|}$.
- Ganz allgemein, sei $c \in \mathbb{C}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass ein Zweig des log auf Ω existiert.

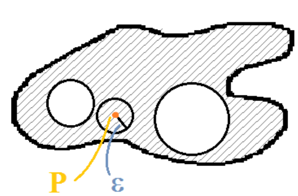
  Dann setzt man $z^c =: \exp(c \cdot \log(z))$.

Beispiel: $z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, $c \notin \mathbb{Z}$. Um z^c zu definieren, können wir $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + i \cdot y \mid x \geq 0,\ y = 0\}$ wählen.



4.4 Differentiation im Komplexen

Definition: $D \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn $\forall\ p \in D\ \exists\, \epsilon > 0$, so dass $B(p,\epsilon) \subset D$ mit $B(p,\epsilon) = \{z : |\, z - p\,| < \epsilon\}$



Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $z,\ z_0 \in \Omega$. Wir sagen, dass $\lim f(z) = w$, wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |\, f(z) - w\,| < \epsilon\ \ \forall\ \ |\, z - z_0\,| < \delta$ (Cauchy-Definition)

Definition:

- f ist stetig am Punkt z_0, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

- f ist stetig auf Ω, wenn f stetig ist am Punkt $z_0 \ \forall \ z_0 \in \Omega$.

Beispiel: $f(z) = z$ stetig auf $\mathbb{C} \iff \forall z \in \mathbb{C} \ \lim_{z \to z_0} f = z_0$.
Man muss zeigen, dass aus $| z - z_0 | < \delta$ die Ungleichung $| f(z) - f(z_0) | < \epsilon$ folgt. Wenn wir $\delta = \epsilon$ nehmen, haben wir $| \underbrace{z}_{=f(z)} - \underbrace{z_0}_{=f(z_0)} | < \epsilon \implies | z - z_0 | < \epsilon$, wie gewünscht.
Beispiel:

- $f(z) = \overline{z}$. Wir möchten zeigen: $| z - z_0 | < \delta \implies | \overline{z} - \overline{z}_0 | < \epsilon$. Man kann wieder $\delta = \epsilon$ nehmen.

- $f(z) = z^2$ Wir möchten zeigen: $| z - z_0 | < \delta \implies | z^2 - z_0^2 | < \epsilon$.
  $| z^2 - z_0^2 | = | (z - z_0) \cdot (z + z_0) | = | z + z_0 | \cdot | z - z_0 |$. Wenn $| z - z_0 | < 1 \implies | z + z_0 | = | z - z_0 + z_0 + z_0 | = | z - z_0 + 2 \cdot z_0 | < | z - z_0 | + 2 \cdot | z_0 | < 2 \cdot | z_0 | + 1$.
  $\implies | z^2 - z_0^2 | = | z + z_0 | \cdot \underbrace{| z - z_0 |}_{<\delta} < (2 \cdot | z_0 | + 1) \cdot \delta < \epsilon$. Das wird sicher erfüllt sein wenn $\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2 \cdot |z_0| + 1}$.
  Man kann also $\delta = \min(\frac{\epsilon}{2(2 \cdot |z_0| + 1)}, 1)$ nehmen.

Eigenschaften: Seien f, g stetig, dann gilt:

- $f + g$ stetig.

- $f \cdot g$ stetig.

- Seien $f : U \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to U$. Dann ist $f \circ g$ stetig.

- Abgesehen von Nullstellen von g ist $\frac{f}{g}$ definiert und stetig.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* am Punkt $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ wenn eine lineare Abbildung A von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ existiert, so dass $f(z) - f(z_0) = A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r$ mit $\lim_{z \to z_0} \frac{r}{|z - z_0|} = 0$.

Schreiben wir $f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r.$$

Definition: f ist differenzierbar auf Ω, wenn f an jedem Punkt von Ω differenzierbar ist.

Definition: Sei Ω eine offene Untermenge von $\mathbb{C}$, und sei $z_0 \in \Omega$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *komplex differenzierbar* auf z_0 ist, wenn der Limes $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert. Dann schreiben wir $\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Bemerkung: Es folgt $f(z) = f(z_0) + \frac{df}{dz}(z_0) \cdot (z - z_0) + r$, mit
$\lim_{z \to z_0} | \frac{r}{z - z_0} | = \lim_{z \to z_0} | \frac{f(z) - f(z_0) - \frac{df}{dz}(z_0) \cdot (z - z_0)}{z - z_0} | = \lim_{z \to z_0} | \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{df}{dz}(z_0) | = 0$.
Die Funktion f ist also auch im Sinne von $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. f ist *komplex differenzierbar auf* Ω oder *holomorph auf* Ω, wenn $\forall \ z_0 \in \Omega$ die Funktion f am Punkt z_0 komplex differenzierbar ist.

Eigenschaften: Seien f, g holomorph auf Ω, dann gilt:

- $f + g$ ist holomorph und $\frac{d(f+g)}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}$.

- $f \cdot g$ ist holomorph und $\frac{d}{dz}(f \cdot g) = \frac{df}{dz} \cdot g + \frac{dg}{dz} \cdot f$.

- $\frac{f}{g}$ ist überall dort holomorph, wo $\frac{f}{g}$ definiert ist, also auf $\Omega \backslash \{z : g(z) = 0\}$.
- Seien $f : \Omega \to U$ und $g : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, dann ist auch $g \circ f$ holomorph.
- Seien U, V offen und sei $f : U \to V$ bijektiv und holomorph, dann ist die Inverse $f^{-1} : V \to U$ holomorph auf V.

Beispiele:

a) $f(z) = \alpha \ \ \forall\ z$.
$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\alpha-\alpha}{z-z_0} = 0 \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$. Konstanten sind also holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $\frac{df}{dz} = 0$.

b) $f(z) = z$. Da $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1 \xrightarrow[z \to z_0]{} 1$ ist diese Funktion ebenfalls holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $\frac{df}{dz} = 1$.

c) $f(z) = P(z)$ mit $P =$ Polynom ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

d) $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit $P, Q =$ Polynom ist holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{$Nullstellen von $Q\}$.

e) Gegenbeispiel: $f(z) = \overline{z}$. Die Funktion f ist $\mathbb{R}$-differenzierbar aber nicht holomorph.

Wir werden von nun an stets die folgende Notation vewenden: $z = x + i \cdot y,\ x, y \in \mathbb{R}$ und $f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y),\ u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$.
Definition: Wir schreiben, dass $g = o(\mid z - z_0 \mid^n)$, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{g}{|z-z_0|^n} = 0$ und $g = O(\mid z - z_0 \mid^n)$, wenn $\exists\ M$, so dass $\mid \frac{g}{(z-z_0)^n} \mid \leq M$ in eine Umgebung von z_0.
In dieser Notation: f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar am Punkt $z_0 \Longleftrightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(\mid z - z_0 \mid)$.

Beispiele:

a) Sei $f(z) = z$, dann ist $f = O(\mid z \mid)$, weil $\mid \frac{f}{z} \mid = \mid 1 \mid \leq 1 = M$.

b) $f(z) = z^2$: Es gilt

   (a) $f = O(\mid z \mid^2)$

   (b) $f = o(\mid z \mid)$

Beweis:

a) $\mid \frac{f(z)}{z^2} \mid = 1$ man kann also $M = 1$ wählen.

b) $\mid \frac{f(z)}{z} \mid = \mid z \mid \xrightarrow[z \to 0]{} 0$.

Satz von Cauchy-Riemann: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und f differenzierbar (im Sinne von $\mathbb{R}$) auf Ω. Dann gilt
$(f = u + i \cdot v$ holomorph$) \Longleftrightarrow (\forall\ (x, y) \in \Omega\ \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ sowie $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x})$
Beweis: "$\Longrightarrow$"
Wir berechnen $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ auf zwei verschiedene Arten:

1. Wir wählen zuerst $z = z_0 + h = x_0 + h + i \cdot y_0$ mit $h \in \mathbb{R}$.
$f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x_0+h, y_0)+i \cdot v(x_0+h, y_0)-(u(x_0, y_0)+i \cdot v(x_0, y_0))}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (\frac{u(x_0+h, y_0)-u(x_0, y_0)}{h} + i \cdot \frac{v(x_0+h, y_0)-v(x_0, y_0)}{h}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ (I)

2. Nun nehmen wir $z = z_0 + i \cdot h$ mit $h \in \mathbb{R}$.
$\frac{df}{dz} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} (\frac{u(x_0, y_0+h)+i \cdot v(x_0, y_0+h)-(u(x_0, y_0)+i \cdot v(x_0, y_0))}{i \cdot h}) = \frac{1}{i} \cdot (\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) = -i \cdot (\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y})$ (II)

Vergleich von (I) und (II): $\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -i \cdot (\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

"$\Longleftarrow$"

Wir nehmen an, dass u und v differenzierbar (im reellen Sinn) und dass die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt sind. Dann:

$$f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y-y_0) + o(|\, z-z_0 \,|) +$$
$$+ i \cdot \left\{ v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot (y-y_0) + o(|\, z-z_0 \,|) \right\} = f(z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \cdot \underbrace{((x-x_0) + i \cdot (y-y_0))}_{z-z_0} +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \cdot \underbrace{((y-y_0) - i \cdot (x-x_0))}_{-i \cdot (z-z_0)} + o(|\, z-z_0 \,|) = f(z_0) + (\frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}) \cdot (z-z_0) + o(|\, z-z_0 \,|).$$

Es folgt, dass $f'(z_0)$ existiert und $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$. □

Beispiele:

1. $f(z) = \overline{z}$ ist nicht holomorph.

   $f(z) = x - i \cdot y = u + i \cdot v$.

   $u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$.

2. $f(z) = z^2$ ist holomorph

   - direkt: $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^2-z_0^2}{z-z_0} = \frac{(z-z_0)\cdot(z+z_0)}{(z-z_0)} = z + z_0 \xrightarrow[z\to z_0]{} 2 \cdot z_0$.
   - mit Cauchy-Riemann: $f(z) = z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i$.

     $u(x,y) = x^2 - y^2,\ v(x,y) = 2 \cdot x \cdot y$,

     $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2 \cdot y$,

     $\frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot x,\ -\frac{\partial u}{\partial x} = -2 \cdot y$.

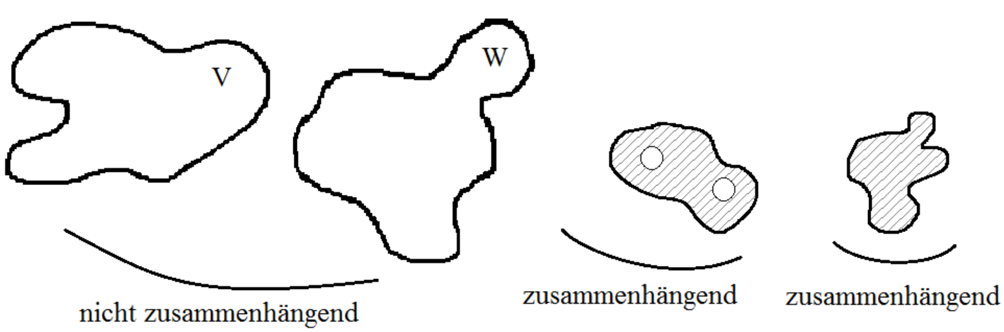
3. $f(z) = e^z = e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) = u + i \cdot v,\ u = e^x \cdot \cos(y),\ v = e^x \cdot \sin(y)$.

   $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos(y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin(y)$,

   $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y),\ -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cdot \sin(y)$.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Ω ist nicht zusammenhängend, wenn offene Mengen V, W existieren, so dass $\Omega = V \cup W$, $V \cap W = \emptyset$ und $V \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$. Wir sagen, dass Ω zusammenhängend ist, wenn Ω nicht nicht zusammenhängend ist.

Beispiele:



Korollar: Sei Ω offen und zusammenhängend und sei f holomorph auf Ω. Wenn f $\mathbb{R}$−wertig ist, dann ist f eine Konstante.

Beweis: Sei $f = u + i \cdot v$ mit $v = 0$, dann ist $\frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \exists\, \varphi$ so dass $u = \varphi(y)$. Dann ist $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \varphi =$ eine Konstante. □

Bemerkung: Wenn Ω nicht zusammenhängend ist, dann ist eine reellwertige holomorphe Funktion lokal konstant, jedoch nicht unbedingt global.

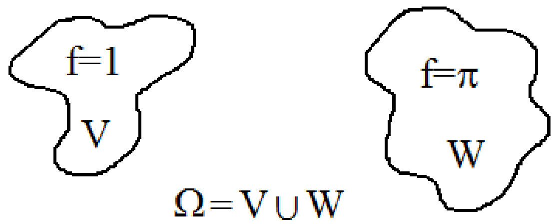


Abbildung 2: Eine reelwertige holomorphe Funktion f mit $f' = 0$ die nicht konstant ist, weil Ω nicht zusammenhängend ist.

Satz: $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ sind holomorph auf $\mathbb{C}$.

Beweis: Zum Beispiel $\sin(z) = \frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$:

- $z \to i$ holomorph (Konstante).
- $z \to z$ holomorph (schon bewiesen).
- $z \to i\cdot z$ holomorph, weil das Produkt von holomorphen Funktionen wieder eine holomorphe Funktion ergibt.
- $z \to e^z$ holomorph (schon bewiesen).
- $z \to e^{i\cdot z}$ Zusammensetzung von $z \to i\cdot z$ und $z \to e^z \Longrightarrow$ holomorph, identisch für $z \to e^{-i\cdot z}$.
- $z \to e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}$ holomorph, weil Summen von holomorphen Funktionen holomorph sind.
- $z \to \frac{e^{i\cdot z}-e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$ Produkt $\longrightarrow$ holomorph.

$\square$

4.5 Integration im Komplexen

Definition: Eine stetige (bzw. differenzierbare), orientierte Kurve γ in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\mathbb{R} \supset [a,b] \ni t \to \gamma(t) = x(t) + i\cdot y(t)$, wobei x und y stetige (bzw. differenzierbare) Funktionen sind.

Definition: Sei $h = u + i\cdot v$ $\mathbb{C}-$wertig, dann definiert man $\int_a^b h(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\cdot\int_a^b v(t)\,dt$.

Definition: Sei γ eine orientierte, differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Man definiert:

$$\int_\gamma f\,dz := \int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\frac{dz}{dt}(t)\,dt\,.$$

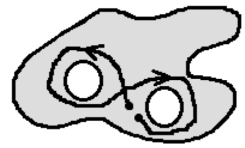
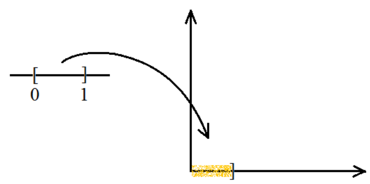


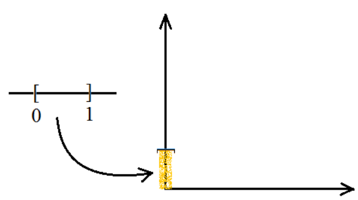
Abbildung 3: Eine Kurve in Ω.

Beispiele:

- $f(z) = z, \gamma(t) = t,\ t \in [0,1], \gamma(t) = t + i \cdot 0,\ x(t) = t,\ y(t) = 0,\ \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt} = 1 + i \cdot 0,$
  $\int\limits_\gamma f\ dz = \int\limits_0^1 z(t) \cdot \frac{dz}{dt}\ dt = \int\limits_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}.$



- $\gamma(t) = i \cdot t,\ z(t) = 0 + i \cdot t,\ x(t) = 0,\ y(t) = t,\ \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \cdot \frac{dy}{dt} = i,$
  $\int\limits_\gamma f\ dz = \int\limits_0^1 f \cdot \frac{dz}{dt}\ dt = -\int\limits_0^1 t\ dt = -\frac{1}{2}.$



- Kreis

  $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z},\ [0, 2\cdot\pi] \ni t \to z(t) = e^{i\cdot t}.$

  $\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(t) + i\cdot\sin(t)) = -\sin(t) + i \cdot \cos(t) = i \cdot e^{i\cdot t}.$

  $n \neq -1$: $\int\limits_\gamma z^n\ dz = \int\limits_0^{2\cdot\pi} (e^{i\cdot t})^n \cdot i \cdot e^{i\cdot t}\ dt = \int\limits_0^{2\cdot\pi} e^{i\cdot(n+1)\cdot t}\ dt = i \cdot \int\limits_0^{2\cdot\pi} [\cos((n+1)\cdot t) + i \cdot \sin((n+1)\cdot t)] dt =$

  $i \cdot \underbrace{\frac{\sin((n+1)\cdot t)}{n+1}\Big|_0^{2\cdot\pi}}_{0} - \underbrace{(-\frac{\cos((n+1)\cdot t)}{n+1})\Big|_0^{2\cdot\pi}}_{0} = 0.$

  $n = -1$: $i \cdot \int\limits_0^{2\cdot\pi} 1\ dt = 2\cdot\pi\cdot i.$

  Insgesamt bekommen wir $\int\limits_\gamma z^n\ dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\cdot\pi\cdot i & n = -1 \end{cases}.$

- Kreis mit Radius r und Zentrum z_0.

  Gegen den Uhrzeigersinn

  $z(t) = z_0 + r \cdot e^{i\cdot t},\ \frac{dz}{dt} = r \cdot i \cdot e^{i\cdot t}.$

  $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{i\cdot t},\ \ f(z) = (z - z_0)^n,\ \int\limits_\gamma (z-z_0)^n\ dz = \int\limits_0^{2\cdot\pi} (r\cdot e^{i\cdot t})^n \cdot (r \cdot i \cdot e^{i\cdot t})\ dt = r^{1+n} \cdot i \cdot \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\cdot\pi & n = 1 \end{cases}$

  Daher: Für $n = -1$ gilt $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\cdot\pi\cdot i$, ansonsten $\int\limits_\gamma (z-z_0)^n\ dz = 0.$

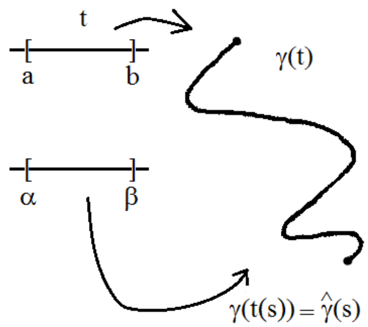


Abbildung 4: Die Kurve $\hat{\gamma}$ ist eine Umparametriesierung der Kurve γ.

Uhrzeigersinn:

$\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{-i \cdot t}$ $\frac{dz}{dt} = -r \cdot i \cdot e^{i \cdot t} \Longrightarrow$ man bekommt 0 bei $n \neq -1$ und $\int \frac{dz}{z - z_0} = -2 \cdot \pi \cdot i$ mit $n = -1$.

Eigenschaften:

a) $\int\limits_\gamma (f+g)\, dz = \int\limits_\gamma f\, dz + \int\limits_\gamma g\, dz$.

b) $\int\limits_\gamma \lambda \cdot f\, dz = \lambda \cdot \int\limits_\gamma f\, dz$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.

c) $\int\limits_\gamma f\, dz$ hängt nicht von der Parametrisierung ab.
Genauer: Sei γ eine differentzierbare Kurve $[a,b] \ni t \to \gamma(t)$, und sei $[\alpha, \beta] \ni s \to t(s) \in [a,b]$ eine differenzierbare monoton wachsende Bijektion. Setzen wir $\hat{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$, cf. Abbildung 4. Dann gilt

$$\int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz = \int\limits_\gamma f\, dz\,.$$

Definition Seien γ_i, $i = 1, \ldots, n$ differenzierbare Kurven. Man definiert

$$\int\limits_{\cup_{i=1}^n \gamma_i} f\, dz := \sum_{i=1}^n \int\limits_{\gamma_i} f\, dz\,.$$

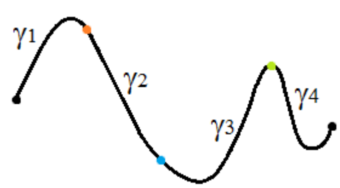


Abbildung 5: $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ differenzierbar, in diesem Fall ist $\gamma = \cup_{i=1}^4 \gamma_i$ stetig und differenzierbar.

Eigenschaft: $\gamma = \hat{\gamma} \cup \tilde{\gamma} \Longrightarrow \int\limits_\gamma f\, dz = \int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz + \int\limits_{\tilde{\gamma}} f\, dz$**.**

Satz: Sei φ eine differenzierbare Bijektion $\mathbb{R} \supset [\alpha, \beta] \ni s \to \varphi(s) \in [a,b]$ und sei γ eine differenzierbare Kurve, $[a,b] \ni t \to \gamma(t) \in \mathbb{C}$. Wir definieren $\hat{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$. Dann gilt:

a) φ ist monoton wachsend $\Longleftrightarrow \int\limits_\gamma f\, dz = \int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz$

b) φ ist monton fallend $\Longleftrightarrow \int\limits_\gamma f\, dz = -\int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz$

Beweis:

$$\begin{tikzcd} {[\alpha,\beta]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\hat{\gamma}"'] & {[a,b]} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

a) φ monoton wachsend, $z(t) = \gamma(t)$, $\frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}$

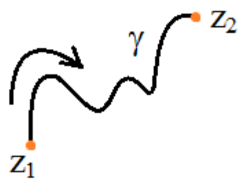
$\int\limits_\gamma f\ dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\ dt$

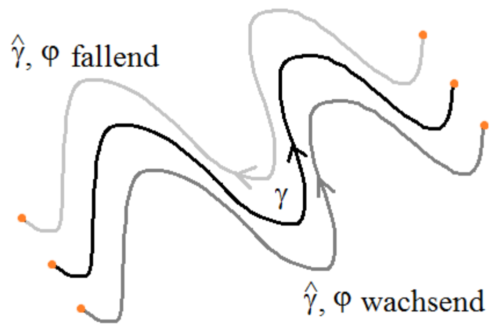
Substitution: $\gamma(t(s)) = \hat{\gamma}(s)$, $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$, $dt = \frac{dt}{ds} ds$,

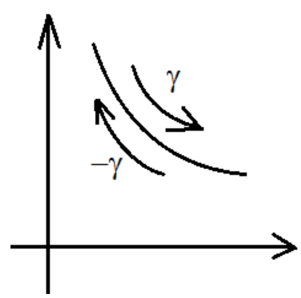
$\int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\ dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(t(s))) \cdot \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\ ds = \int\limits_\alpha^\beta f(\hat{\gamma}(s)) \frac{d\hat{\gamma}}{ds} = \int\limits_{\hat{\gamma}} f\ dz$

b) φ monoton fallend $\Longrightarrow$ das Vorzeichen ändert sich. $\square$

Definition: Sei γ eine Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Die in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve bezeichnet man als $-\gamma$. Es gilt dann $\int\limits_{-\gamma} f(z)\ dz = -\int\limits_\gamma f(z)\ dz$[5]



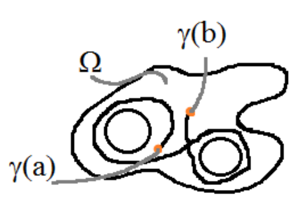




Beispiel:: $[0,1] \ni t \to \gamma(t)$, $(-\gamma)(t) := \gamma(1-t)$

Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und sei f holomorph auf Ω. Nehmen wir an, es existiert eine Funktion F auf Ω, so dass $\frac{dF}{dz} = f$. F wird dann *Stammfunktion* genannt. Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Dann gilt

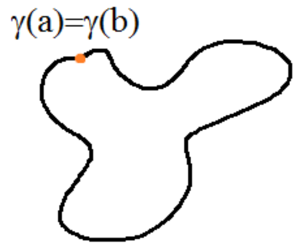
$$\int\limits_\gamma f\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$



[5] $(-\gamma(t)) \neq -\gamma(t)$

Beweis: $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}[F(\gamma(t))]dt = \int_a^b \frac{dF}{dt}(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}\,dt = \int_\gamma f(z)\,dz.$ □

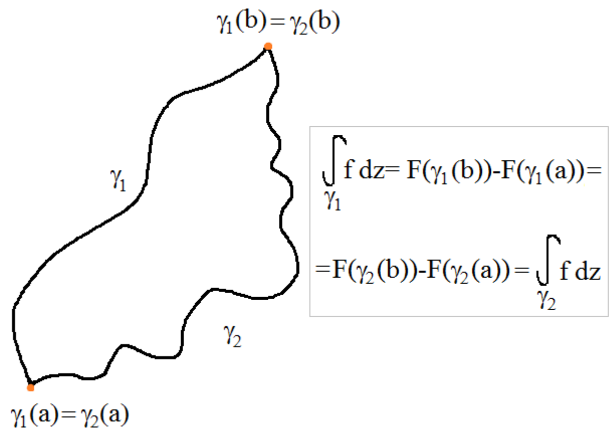
Korollar: Sei γ eine geschlossene Kurve (das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$)



Wenn ein F existiert, so dass $F' = f$, dann ist $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Beweis: $\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0.$ □

Korollar: Wenn ein F existiert, so dass $F' = f$, dann hängt $\int_\gamma f\,dz$ nur von den Endpunkten ab.



4.6 Integralsatz von Cauchy

Definition: Sei $U \subset \mathbb{C}$

a) Das Innere von U ist definiert als $\mathring{U} = \{z \in U \mid \exists\, \epsilon > 0 : D(z,\epsilon) \subset U\}$

b) Der Abschluss von U ist definiert als $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall\, \epsilon > 0 : D(z,\epsilon) \cap U \neq \emptyset\}$

c) Der Rand von U ist definiert als $\partial U = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall\, \epsilon > 0 : D(z,\epsilon) \cap U \neq \emptyset \wedge D(z,\epsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus U) \neq \emptyset\}$

Bemerkungen:

a) $\overline{U} = \mathring{U} \cup \partial U$

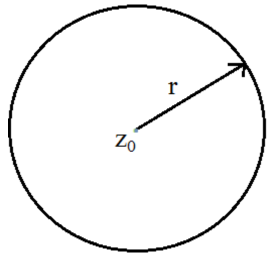
b) $\partial U \cap \mathring{U} = \emptyset$

Beispiele:

a) $\Omega = D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$

dann

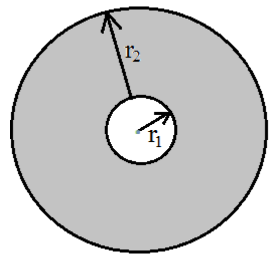
- $\mathring{\Omega} = \Omega$
- $\overline{\Omega} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$



- $\partial\Omega = C(z_0, r)$, wobei $C(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}$

b) $\Omega = D(z_0, r_2) \backslash \overline{D(z_0, r_1)} - \{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}(*)$

Mengetheoretisch: $\partial\Omega = C(z_0, r_2) \cup C(z_0, r_1)$; aber mit Orientierung $\partial\Omega = C(z_0, r_2) \cup -C(z_0, r_1)$



Definition: Sei Ω offen und γ eine Kurve auf dem Rand von Ω. Man wählt die Orientierung von γ so, dass sich Ω am linken Ufer von γ befindet.

Satz (Integralsatz von Cauchy): Sei Ω offen. Wir nehmen an, dass $\partial\Omega$ eine Vereinigung von endlich vielen differenzierbaren Kurven ist, und dass $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und f holomorph auf Ω ist. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0\,.$$

Beweis nur für ein Rechteck: $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. Wir können schreiben $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, vgl. Abbildung 6.

Sei $\gamma_1(x) = x + i \cdot c$ mit $x \in [a, b]$, dann ist $\frac{d\gamma_1}{dx} = 1$ und $x + i \cdot c = (x, c)$. Weiterhin gilt:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_a^b f(x, c) \frac{d\gamma_1}{dx}\, dx = \int_a^b (u(x, c) + i \cdot v(x, c))\, dx\,.$$

Wie sonst auch schreiben wir $f = u + i v$ für reellwertige Funktionen u und v.

$\gamma_2 :\ \gamma_2(y) = b + i \cdot y$ mit $y \in [c, d]$ und $\frac{d\gamma_2}{dy} = i$,

$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_c^d f(b, y) \frac{d\gamma_2}{dy}\, dy = i \int_c^d (u(b, y) + i \cdot v(b, y))\, dy,$

$\gamma_3 = -\hat{\gamma}_3$ mit $\hat{\gamma}_3(x) = x + i \cdot d$ und $x \in [a, b]$,

$\int_{\gamma_3} f\, dz = -\int_{\hat{\gamma}_3} f\, dz = -\int_a^b f(\hat{\gamma}_3(x)) \frac{d\hat{\gamma}_3}{dx}\, dx = -\int_a^b (u(x, i \cdot d) + i \cdot v(x, i \cdot d))\, dx,$

γ_4 ähnlich: $\int_{\gamma_4} f\, dz = -\int_c^d (u(a, y) + i \cdot v(a, y)) \cdot i\, dy,$

$\int_{\gamma_1} f\, dz + \int_{\gamma_3} f\, dz = -\int_a^b (\underbrace{u(x, d) - u(x, c)}_{\int_c^d \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\, dy} + i \cdot (\underbrace{v(x, d) - v(x, c)}_{\int_c^d \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\, dy}))\, dx = -\iint (\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y})\, dx dy,$

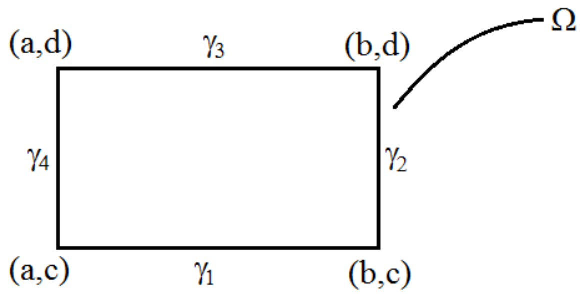


Abbildung 6: $\partial((a,b)\times(c,d)) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$.

$$\int_{\gamma_2} f\ dz + \int_{\gamma_4} f\ dz = i\int_c^d (\underbrace{u(b,y)-u(a,y)}_{\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\ dx} + i\cdot(\underbrace{v(b,y)-v(a,y)}_{\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\ dx}))\ dy = \iint (i\cdot \tfrac{\partial u}{\partial x} - \tfrac{\partial v}{\partial x})\ dxdy.$$

Es folgt, dass

$$\int_{\partial\Omega} f\ dz = \int_{\gamma_1} f\ dz + \int_{\gamma_2} f\ dz + \int_{\gamma_3} f\ dz + \int_{\gamma_4} f\ dz = \iint (-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - i\cdot(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}))\ dxdy = 0\,,$$

wegen der Cauchy-Riemann Gleichungen. □

Definition: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist einfach geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ injektiv ist.

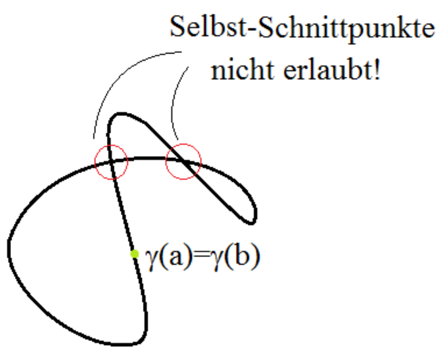


Abbildung 7: Eine Kurve die geschlossen ist, aber nicht einfach geschlossen.

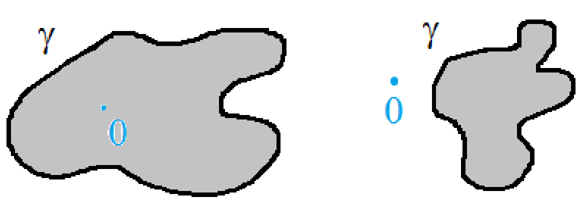
Jordan Lemma: Sei γ einfach geschlossen, dann existiert eine offene begrenzte Menge Ω, so dass $\partial\Omega = \gamma$.

Anwendungen:

1) Sei γ eine einfach geschlossene Kurve, dann gilt:

   (a) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\cdot\pi\cdot i$, falls γ den Nullpunkt 0 umschließt,

   (b) $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$, falls γ den Nullpunkt 0 nicht umschließt.



Beweis:

(a) Wir wählen Ω, so dass $\gamma = \partial\Omega$, und setzen $\hat{\Omega} = \Omega \setminus \overline{D(0,\epsilon)}$ mit ϵ klein genug, so dass $D(0,\epsilon) \subset \Omega$. Dann $\partial\hat{\Omega} = \partial\Omega \cup (-C(0,\epsilon))$, und

$$0 = \int\limits_{\partial\hat{\Omega}} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int\limits_{C(0,\epsilon)} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} - 2\cdot\pi\cdot i \Longrightarrow \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\cdot\pi\cdot i\,.$$

(b) ist klar (folgt direkt von dem Satz von Cauchy)

(c) Analog:

$$\int\limits_{\gamma} (z-z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\cdot\pi\cdot i, & \text{falls } n=-1 \text{ und } \gamma \text{ den Nullpunkt } z_0 \text{ umschließt;} \\ 0, & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

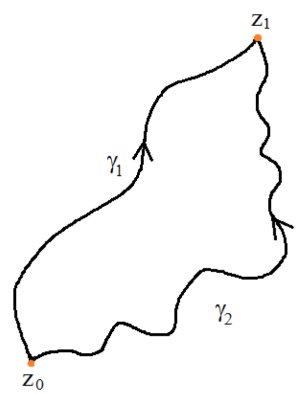
4.7 Unbestimmtes Integral

Satz: Sei f stetig auf einer offenen Menge Ω und sei $z_0 \in \Omega$. Nehmen wir an, $\int\limits_{\gamma} f\, dz = 0$ für alle einfach geschlossenen Kurven in Ω. Sei γ_{z_1} eine beliebige stückweise differenzierbare Kurve von z_0 bis z_1. Dann ist die Funktion

$$\Omega \ni z_1 \mapsto F(z_1) = \int\limits_{\gamma_{z_1}} f(z)\, dz\,,$$

wohldefiniert in dem Sinne, dass das Integral unabhängig von der Wahl von γ_{z_1} ist. Außerdem ist F holomorph und $F' = f$.

Ohne Beweis, nur eine Bemerkung: Wie betrachten zwei Kurven γ und $\hat{\gamma}$, beide von z_0 bis z_1.



Dann ist die Kurve $\gamma \cup (-\hat{\gamma})$ geschlossen, und daher gilt

$$\int\limits_{\gamma\cup(-\hat{\gamma})} f\, dz = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\gamma} f\, dz + \int\limits_{-\hat{\gamma}} f\, dz = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\gamma} f\, dz - \int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz = 0 \Longleftrightarrow \int\limits_{\gamma} f\, dz = \int\limits_{\hat{\gamma}} f\, dz\,.$$

Das zeigt, dass F von der Wahl von γ_{z_1} unabhängig ist und somit nur von z_1 abhängt. □

4.7.1 Anwendung: Stammfunktion von $\frac{1}{z}$

Erinnerung Satz (1): Sei Ω offen und f stetig auf Ω. Wenn $\int\limits_{\gamma} f\, dz = 0$ für alle einfach geschlossenen Kurven in Ω, dann existiert ein F, so dass $f = F'$. Wählen wir ein beliebiges $z_0 \in \Omega$, dann gilt für $z_1 \in \Omega$, dass

$$F(z_1) = \int\limits_{\gamma_{z_1}} \frac{1}{z}\, dz + C\,,$$

wobei γ_{z_1} irgendeine Kurve in Ω von z_0 bis z_1 ist und C eine Konstante.

Erinnerung Satz (2): Sei Ω offen, f holomorph, $U \subset \Omega$, dann ist $\int\limits_{\partial U} f\, dz = 0$.

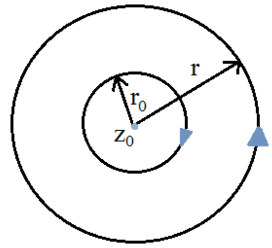


Abbildung 8

Erinnerung Satz (3): Jordan Lemma: Jede einfach geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist eine Randkurve.

Korollar: Jede holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.

Jetzt betrachten wir die Funktion $\frac{1}{z}$, die nur für $z \neq 0$ holomorph ist. Es gilt:

Satz: Setzen wir $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + i \cdot y \mid y = 0,\ x \leq 0\}$. Dann ist $\frac{1}{z} = (\log\ z)'$ wobei log der Hauptzweig des Logarithmus ist.

Beweis: $\frac{1}{z}$ ist holomorph außer bei $z = 0$.

Für $r > 0$, gilt: $\int\limits_{\partial D(0,r)} \frac{1}{z}\, dz = 2 \cdot \pi \cdot i \neq 0$, auf $\mathbb{C}^*$ kann man Satz (1) also sicherlich nicht anwenden. Aber wenn wir eine geschlossene Kurve in Ω finden, dann schließt γ den Punkt $z = 0$ nicht ein, also kann man Satz (2) und Jordan Lemma benutzen. Man bekommt, dass $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = 0$. Aus Satz (1) folgt, dass ein F existiert, so dass $F' = \frac{1}{z}$ und $F(z_1) = \int\limits_{\gamma_{z_1}} \frac{1}{z}\, dz$, wobei γ_{z_1} irgendeine Kurve von $z_0 = 1$ bis z_1 ist.

Die Berechnung von $F(z_1)$ für $|z_1| \geq 1$, d.h. $z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$ mit $r_1 = |z_1| \geq 1$, $\varphi_1 \in [0, 2 \cdot \pi)$ ergibt

$\gamma_{z_1} = \gamma \cup \hat{\gamma},\ \gamma(t):\ t \in [1, r_1],\ \gamma(t) = t$

$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = \int\limits_{1}^{r_1} \frac{1}{t}\, dt = \log(r_1) - \log(1) = \log(r_1) = \log|z_1|$

$\hat{\gamma}(t):\ t \in [0, \varphi_1],\ \hat{\gamma}(t) = |z_1| \cdot e^{i \cdot t} = z(t),\ \frac{dz}{dt} = i \cdot |z_1| \cdot e^{i \cdot t} = i \cdot z(t)$

$\int\limits_{\hat{\gamma}} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{\varphi_1} \frac{i \cdot z(t)}{z(t)}\, dt = i \cdot \varphi_1$

$\int\limits_{\gamma_{z_1}} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int\limits_{\hat{\gamma}} \frac{dz}{z} = \log|z_1| + i \cdot \varphi_1 = \text{Hauptzweig des Logarithmus } (z_1).$

Für die verbleibenden Fälle sind die Rechnungen analog. □

4.8 Cauchy'sche Integralformel

Satz (Cauchy): Sei f holomorph auf eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und sei $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Dann ist

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\,.$$

Beweis: Für alle r mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$ setzen wir

$$F(r) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,.$$

Dann gilt:

1. F ist r-unabhängig

   Beweis von 1.: Sei $0 < r_1 < r$. Wir setzen $U = D(z_0, r) \setminus \overline{D(z_0, r_1)}$, dann ist die Funktion $\frac{f(z)}{z - z_0}$ holomorph auf U und $\partial U = C(z_0, r) \cup (-C(z_0, r_1))$, vgl. Abbildung 8. Folglich

$$\underbrace{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}_{F(r)} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{-C(z_0,r_1)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}_{-F(r_1)} = 0 \Longrightarrow F(r) = F(r_1)\,.$$

2. Für kleine r_1 mit $r_1 = | z - z_0 |$ ist $f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(| z - z_0 |)$, also

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} f'(z_0)\cdot\frac{z-z_0}{z-z_0}\,dz}_{0}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{o(| z-z_0 |)}{z-z_0}\,dz}_{\to 0 \text{ für } r_1\to 0}\,.$$

Tatsächlich:

$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} f'(z_0)\cdot\frac{z-z_0}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i} f'(z_0)\cdot \underbrace{\int_{\partial D(z_0,r_1)} 1\,dz}_{0}$, (1 ist holomorph und ∂D einfach geschlossen).

Auf $\partial D(0,r_1)$ gilt $\frac{o(|z-z_0|)}{|z-z_0|} \xrightarrow[r_1\to 0]{} 0$ und somit $\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{o(|z-z_0|)}{z-z_0}\,dz \xrightarrow[r_1\to 0]{} 0$.

Wir erhalten

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\underbrace{\int_{\partial D(z_0,r_1)} \frac{dz}{z-z_0}}_{2\cdot\pi\cdot i} = \frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot f(z_0)}{2\cdot\pi\cdot i} = f(z_0)$$

und es folgt dass

$$F(r) = F(r_1) = \lim_{r_1\to 0} F(r_1) = f(z_0) + 0 + 0 = f(z_0)\,.$$

□

4.9 Ableitung einer holomorphen Funktion

Satz: Sei Ω offen und f holomorph auf Ω. Dann ist f' ebenfalls holomorph und für alle r mit $D(z_0,r)\subset\Omega$ gilt

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\,.$$

Beweis: Seien z_1 und r_1 so gewählt dass

$$D(z_0,r)\subset D(z_1,r_1)\subset\Omega\,,$$

dann bekommen wir

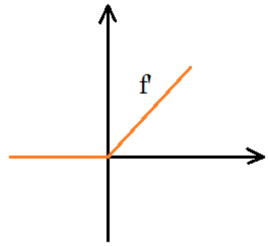
$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = \int_{\partial D(z_1,r_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz\,,\qquad \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = \int_{\partial D(z_1,r_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\,.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz_0} &= \frac{d}{dz_0}\Big(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\Big)\\
&= \frac{d}{dz_0}\Big(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_1,r_1)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\Big)\\
&= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_1,r_1)} \underbrace{\frac{d}{dz}\Big(\frac{f(z)}{z-z_0}\Big)}_{\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}}\,dz = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_1,r_1)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz\\
&= \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz. \qquad (2)
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Wir wählen $\mathbb{R} \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$ so dass $f(x) = \begin{cases} x^2\,, & x > 0 \\ 0\,, & x \leq 0 \end{cases}$, dann ist $f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x\,, & x > 0 \\ 0\,, & x \leq 0 \end{cases}$ und $f''(0)$ existiert nicht. Es gibt also keinen entsprechenden Satz für differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.



Korollar: Sei Ω offen und f holomorph auf Ω. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar mit

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,.$$

Beweis: Wie in (2):

$$\begin{aligned}
\frac{d^n f}{dz_0^n}(z_0) &= \frac{d^n}{dz_0^n}\Big(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\Big) \\
&= \frac{d^n}{dz_0^n}\Big(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_1,r_1)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\Big) \\
&= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_1,r_1)} \underbrace{\frac{d^n}{dz_0^n}\Big(\frac{f(z)}{z - z_0}\Big)}_{\frac{n! f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}} dz \\
&= \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz. \qquad (3)
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar (Cauchy-Abschätzung): Sei Ω offen und f holomorph auf Ω. Des Weiteren nehmen wir an, dass $|f(z)| \leq M$ für $|z - z_0| = r$. Dann gilt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}\,.$$

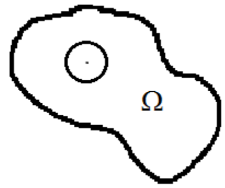
Beweis: Wir benutzen die Gleichung

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,.$$

Wir wählen die übliche Parametrisierung $z - z_0 = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$. Dann ist $\frac{dz}{d\varphi} = i \cdot r \cdot e^{i \cdot \varphi}$. Weiters

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| &= \Big|\frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot \cancel{i}} \int\limits_0^{2\cdot\pi} \frac{f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot \varphi})}{r^{\cancel{n+1}} \cdot e^{i \cdot (\cancel{n+1}) \cdot \varphi}} \cancel{i \cdot r \cdot e^{i \cdot \varphi}}\, d\varphi\Big| = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot r^n} \Big| \int\limits_0^{2\cdot\pi} \frac{f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot \varphi})}{e^{i \cdot n \cdot \varphi}}\, d\varphi \Big| \\
&\leq \frac{n!}{2 \cdot \pi r^n} \underbrace{\int\limits_0^{2\cdot\pi} \underbrace{\Big|\frac{f(z_0 + r \cdot e^{i \cdot \varphi})}{e^{i \cdot n \cdot \varphi}}\Big|}_{\leq M} d\varphi}_{\leq 2 \cdot \pi \cdot M} \\
&\leq \frac{n! \cdot M}{r^n}\,.
\end{aligned}$$

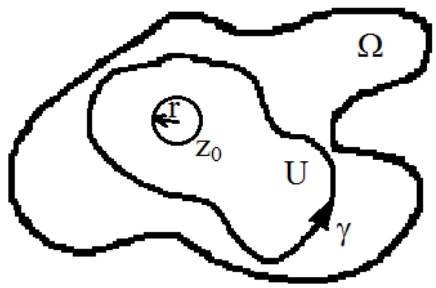
$\square$



Korollar: Sei f holomorph auf Ω und sei $\gamma = \partial U$ mit $\overline{U} \subset \Omega$ und $z_0 \in U$, U offen. Dann ist

$$\frac{n!}{2\cdot\pi\cdot i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0)\,.$$

Beweis:



Sei r klein genug, so dass $D(z_0,r)\subset U$. Dann ist $\frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}$ holomorph auf $U\backslash\overline{D(z_0,r)}$, d.h. $\int\limits_{\partial(U\backslash\overline{D(z_0,r)})} \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 0$, aber

$$\int\limits_{\partial(U\backslash\overline{D(z_0,r)})} \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int_\gamma \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz - \int\limits_{\partial D(z_0,r))} \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,$$

also

$$\int_\gamma \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \int\limits_{\partial D(z_0,r))} \frac{f}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\cdot\pi\cdot i}{n!} f^{(n)}(z_0)\,.$$

□

Satz (von Liouville): Sei f holomorph auf $\mathbb{C}$. Wenn eine Konstante M existiert, sodass $|\,f\,|\le M$, dann ist f konstant.

Beweis: Von der Cauchy-Abschätzung mit $n = 1$ erhalten wir $|\,f'(z_0)\,|\le \frac{M}{r}\ \forall\ z_0\ \forall\ r$. Aber r ist beliebig groß, also ist $\frac{M}{r}$ beliebig klein und es folgt, dass $|\,f'(z_0)\,|= 0$. Da z_0 beliebig war, ist $f' = 0$ auf $\mathbb{C} \Longrightarrow f$ =const. □

Satz (Fundemantelsatz der Algebra): Jedes Polynom hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, wenn die Ordnung größer oder gleich eins ist.

Beweis durch Widerspruch: Nehmen wir an, $P = a_n\cdot z^n + a_{n-1}\cdot z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$, d.h. insbesondere $|\,a_n\,|\neq 0$, hat keine Nullstelle. Für große $z : |\,P(z)\,|\approx|\,a_n\,|\cdot|\,z\,|^n \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, also $\frac{1}{|P(z)|}\approx\frac{1}{|a_n|\cdot|z|^n} \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Es folgt, dass $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ beschränkt und holomorph ist, also konstant $\Longrightarrow$ Widerspruch. □

Korollar: Jedes Polynom von Ordnung $n \ge 1$ lässt sich zerlegen als $P = a_n\cdot(z-z_1)\cdot(z-z_2)\cdot\dots\cdot(z-z_n)$. $a_n\in\mathbb{C}$, $z_i\in\mathbb{C}$.

4.10 Unendliche Reihen komplexer Zahlen

Unser Ziel ist der

Satz: Sei f holomorph auf $D(z_0,r)$, dann existiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n\in\mathbb{C}$, so dass $\forall\ |\,z\,|< r$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-z_0)^n$ gilt, wobei die Reihe absolut konvergent ist.

Um diese Ziel zu erreichen, müssen wir ein wenig arbeiten. Wir fangen mit einer Definition an:

Definition: Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n\in\mathbb{C}$. Wir sagen, dass

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. a heißt die Summe von $\{a_i\}$. Wir schreiben $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} | a_n |$ konvergiert.

Liste von Konvergenz- und Nichtkonvergenz-Kriterien

1. Nehmen wir an, dass $a_n \nrightarrow 0$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.
2. Vergleichskriterium 1

   Sei $| a_n | \leq M \cdot | b_n |$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und eine absolut konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Dann ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
3. Vergleichskriterium 2

   $| a_n | \leq | b_n |$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergent $\Longrightarrow \sum b_n$ ebenfalls nicht absolut konvergent.
4. Quotientenkriterium 1

   Nehmen wir an, dass $q := \lim | \frac{a_{n+1}}{a_n} |$ existiert. Dann gilt: $q < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent; $q > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist nicht konvergent.
5. Quotientenkriterium 2

   Nehmen wir an, dass $q \in (0,1)$ und N existieren sodass $\forall\ n \geq N\ | \frac{a_{n+1}}{a_n} | \leq q$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

   Nehmen wir an, dass $q > 1$ und N existieren sodass $\forall\ n \geq N\ | \frac{a_{n+1}}{a_n} | \geq q$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.
6. Wurzelkriterium 1

   Nehmen wir an, dass $q := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |}$ existiert. Dann gilt: $q < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent; $q > 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist nicht konvergent.
7. Wurzelkriterium 2

   Nehmen wir an, dass $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $\forall\ n \geq N\ \sqrt[n]{| a_n |} \leq q$. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, d.h. $a_n = z^n$.

$\sqrt[n]{| a_n |} = \sqrt[n]{| z |^n} = | z | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z|$

Wurzelkriterium 1: $| z | < 1 \Longrightarrow$ Reihe ist absolut konvergent, $| z | > 1 \Longrightarrow$ Reihe konvergiert nicht

$| z | = 1$, $| a_n | = | z^n | = | z |^n = 1 \nrightarrow 0$, also keine Konvergenz.

Zusammenfassung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert genau auf $D(0,1)$.

Bemerkung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{\text{definiert und holomorph auf } \mathbb{C}\setminus\{1\}}, \ | z | < 1$

Beispiele:

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{z-z_0}{R})^n$

  Wurzelkriterium: $a_n = (\frac{z-z_0}{R})^n$

  $\sqrt[n]{| a_n |} = \frac{z-z_0}{R}$:

  $< 1 \Longleftrightarrow z \in D(z_0, R)$

  $> 1 \Longleftrightarrow | z - z_0 | > R$

  $= 1 \Longrightarrow a_n \nrightarrow 0 \Longrightarrow$ keine Konvergenz

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$
  Vergleichskriterium: $\sum | z |^n$ konvergiert auf $D(0,1)$ und es gilt $| \frac{z^n}{n} | \leq | z^n | \Longrightarrow \sum \frac{z^n}{n}$ konvergiert auf $D(0,1)$
  Quotientenkriterium 1: $a_n = \frac{z^n}{n}$. Es gilt $| \frac{a_{n+1}}{a_n} | = \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}} \right| = | \frac{z \cdot n}{n+1} | = | z | \cdot | \frac{1}{1+\frac{1}{n}} | \to | z |$
  $| z | > 1 \Longrightarrow$ Reihe konvergiert nicht
  $| z | = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} | \frac{z^n}{n} | = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, also keine absolute Konvergenz für $| z | = 1$.

4.11 Potenzreihen

Definition: Eine Potenzreihe ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Hauptsatz: Es existiert eine Zahl $R \in [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$, so dass

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ konvergiert absolut für $| z | < R$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ konvergiert nicht für $| z | > R$.

R heißt **Konvergenzradius**.

Bemerkung: Für $| z | = R$ kann alles mögliche geschehen.

Eigenschaften: (ohne Beweis)

1. Sei $r \in R$. Es existiert ein M, so dass $| \alpha_n | \cdot r^n \leq M \Longleftrightarrow r \leq R$

2. $\lim_{n\to\infty} | \frac{a_{n+1}}{a_n} | = q$ existiert $\Longrightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{q}, & q > 0 \\ R = \infty, & q = 0 \end{cases}$

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n} = q$ existiert $\Longrightarrow \begin{cases} R = \frac{1}{q}, & q > 0 \\ R = \infty, & q = 0 \end{cases}$

4. **Cauchy-Hadamard Satz:** $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

   Bemerkung: 3. folgt sofort von 4., weil wenn lim existiert, ist $\limsup = \lim$.

5. Nehmen wir an, dass $R > 0$. Wir setzen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $| z | < R$. Dann ist f holomorph auf $D(0,R)$ und $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n \cdot z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$. Außerdem hat $\sum n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ denselben Konvergenzradius wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{n-1}$.

6. Sei $R > 0$ und F eine Stammfunktion von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $| z | < R$, dann ist $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot z^{n+1}}{n+1} + c$, wobei c eine Konstante ist. Außerdem hat $\sum \frac{a_n \cdot z^{n+1}}{n+1}$ denselben Konvergenzradius wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{n-1}$.

7. Sei R_1 der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot z^n$ und R_2 Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot z^n$, dann hat $\sum(\alpha_n + \beta_n) \cdot z^n$ den Konvergenzradius $R \geq min(R_1, R_2)$.

   Bemerkung: R kann größer sein (das geschieht zum Beispiel, wenn man $\beta_n = -\alpha_n$ nimmt).

Beispiele:

1. $\sum z^n$: konvergiert absolut für $| z | < 1$, konvergiert nicht für $| z | \geq 1$. Der Konvergenzradius ist also $R = 1$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} \cdot z = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1}$, aber $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = \frac{d}{dz} \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} z^n)$ mit Konvergenzradius $R = 1$. Also hat $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n$ ebenfalls Konvergenzradius 1. Außerdem:
   $\frac{d}{dz} \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} z^n) = z \cdot \frac{d}{dz}(\frac{1}{1-z}) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

3. $\sum n! \cdot z^n$, $R = ?$

   Quotientenkriterium: $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \rightsquigarrow \frac{(n+1)! \cdot z^{n+1}}{n! \cdot z^n} = (n+1) \cdot |z| \to \infty$ für $z \neq 0$. Die Potenzreihe konvergiert also nur für $|z| = 0 \Longrightarrow R = 0$

4. $\sum \frac{z^n}{n!} \rightsquigarrow$ Quotientenkriterium: $\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C} \Longrightarrow R = \infty$.

Beispiel: Taylorreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$.

Satz (Korollar zu den Cauchy Ungleichungen): Sei $r > 0$ und sei $f : \overline{D(z_0, r)} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $D(z_0, r)$. Dann hat die Taylorreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$ ein Konvergenzradius $R \geq r$. Anders gesagt, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$ konvergiert absolut für $|z - z_0| < r$.

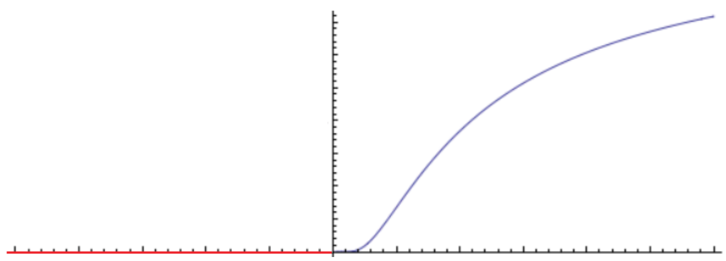
Beweis: Wir setzen $M = \sup\limits_{z \in \overline{D(z_0, r)}} |f(z)|$, so dass $|f| \leq M$ auf $\overline{D(z_0, r)}$. Es gilt $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}$ und somit

$$|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n| \leq M \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right)^n = M \cdot q^n ,$$

mit $q = \frac{|z - z_0|}{r}$. Da $\sum q^n$ für $|q| < 1$ absolut konvergiert, ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$ absolut konvergent für $|z - z_0| < r$. $\square$

Bemerkung: ⚠ Es existieren Taylorreihen für unendlich oft $\mathbb{R}$-differenzierbare Funktionen, die konvergieren, allerdings nicht gegen die ursprüngliche Funktion. ⚠

Beispiel: $\mathbb{R} \ni x \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$



Es lässt sich zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall \ n$. Daher konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ für alle x und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = 0$, aber $0 \neq f$ für $x > 0$.

Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, sei f holomorph auf Ω und sei $D(z_0, r) \subset \Omega$. Dann ist $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n \ \forall \ z \in D(z_0, r)$.

Beweis: Wir wählen $r_0 < r$, z_1 und r_1, sodass $\overline{D(z_1, r_1)} \subset D(z_0, r_0)$, siehe Abbildung 9. Wir haben gesehen, dass

$$f(z_1) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int\limits_{\partial D(z_0, r_0)} \frac{f(z)}{z - z_1} \, dz .$$

Weiters können wir für $z \in \partial D(z_0, r_0)$

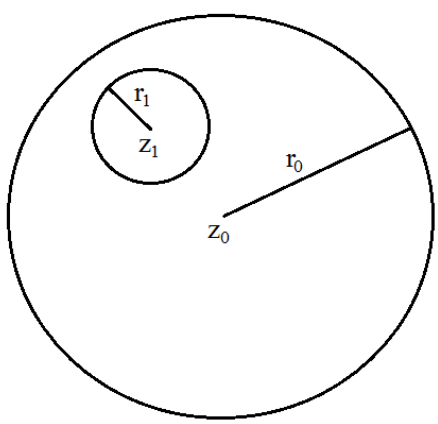


Abbildung 9

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{z-z_0-(z_1-z_0)}=\frac{1}{(z-z_0)\cdot(1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0})}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

schreiben. Die Reihe ist für $|\frac{z_1-z_0}{z-z_0}|<1$ absolut konvergent, wir erhalten also

$$f(z_1)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1-z_0)^n}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right)}_{=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}\cdot(z_1-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z_1-z_0)^n\,. \qquad \square$$

4.12 Analytische Funktionen

Definition: Sei Ω offen. Wir sagen, dass f analytisch auf Ω ist, wenn für $\forall\ z_0\in\Omega$ eine Potenzreihe $\sum a_n\cdot(z-z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius R existiert, so dass $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-z_0)^n$ für $z\in D(z_0,R)$.

Bemerkung: Sowohl die Reihe $\sum a_n\cdot(z-z_0)^n$ als auch der Konvergenzradius hängen im Allgemeinen von z_0 ab.

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt:

Hauptsatz: Sei Ω offen, dann gilt:

$$(f \text{ holomorph auf } \Omega) \Longleftrightarrow (f \text{ analytisch auf } \Omega).$$

4.13 Laurent-Reihen

Beobachtung: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$ für $|z|<1$. Für $|z|>1$ gilt:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\cdot(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\,.$$

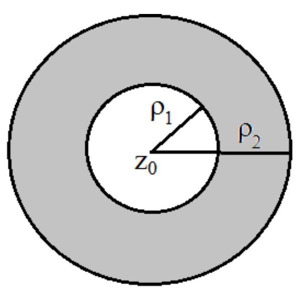
Die Reihe konvergiert absolut $\forall\ z$ mit $|z|>1$. Das ist die zentrale Beobachtung, auf der die Theorie von Laurentreihen basiert.

Definition: Eine Laurent-Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-z_0)^n$ auf $D(z_0,r_1)\backslash\overline{D(z_0,r_2)}$, wobei $0\le r_2<r_1\le\infty$, ist eine Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\cdot(z-z_0)^{-n}\,,$$

bei der beide Reihen absolut konvergent sind.

Satz (ohne Beweis): Jede holomorphe Funktion in einem Kreisring $\rho_2<|z-z_0|<\rho_1$ lässt sich in diesem Kreisring in eine Laurent-Reihe entwickeln.



Satz: Sei $r\in(\rho_1,\rho_2)$ mit $\rho_2<|z-z_0|<\rho_1$ ein Kreisring. Dann ist

$$a_n=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\quad\forall\ n\in\mathbb{Z}\,.$$

Beweis:

$$\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)}\frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}a_m\cdot(z-z_0)^m}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\underbrace{\int\limits_{\partial D(z_0,r)}(z-z_0)^{m-n-1}\,dz}_{=0,\text{ außer wenn }(m-n-1=-1)\Longleftrightarrow(m=n),\text{ dann Integral}=\,2\cdot\pi\cdot i}=a_n\,.\qquad\square$$

Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz des letzten Satzes ist $a_{-1}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)}f(z)\,dz$.

Definition: Wir sagen dass z_0 eine **isolierte Singularität** von f ist, wenn ein $r>0$ existiert so dass f definiert und holomorph auf $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ ist.

Sei $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n$ die Laurentreihe von f mit Zentrum z_0.

1. z_0 heißt "wesentliche Singularität", wenn die Laurent-Entwicklung unendlich viele negative Potenzen besitzt;
2. z_0 heißt "Pol" oder "Polstelle", wenn nur eine endliche Zahl von Koeffizienten a_n mit $n<0$ nicht verschwinden. Die Ordnung eines Poles ist die Zahl m, für die $a_n=0$ für alle $n<-m$, aber $a_{-m}\neq 0$;
3. z_0 heißt hebbar, wenn $a_n=0$ für alle $n<0$.

Beispiele:

1. $f(z)=\frac{\sin(z)}{z}$, $z\neq 0$ und $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

   Dann ist $z_0=0$ eine hebbare Singularität. Das kann man so sehen: Die Funktion $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2\cdot n+1}\cdot(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}$ konvergiert absolut für $z\in\mathbb{C}$, daher

   $$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2\cdot n+1}\cdot(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\,\frac{z^{2\cdot n+1}}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n+1)!}\cdot z^{2\cdot n}\,,$$

   und es gibt keine negative Potenzen von z.

   Bemerkung: Die Rechnung zeigt, dass f sich zu einer Funktion erweitern lässt, die holomorph auf $\mathbb{C}$ ist. Das ist eine allgemeine Eigenschaft von hebbaren Singularitäten.

2. $f(z)=\frac{1}{z-i}$.

   In diesem Fall ist i eine Polstelle der Ordnung 1.

3. $f(z)=\frac{e^z}{(z+i)^{30}}$.

   Wir erhalten

   $$e^z=e^{z+i-i}=e^{-i}\cdot e^{z+i}=e^{-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n!}$$

   mit Konvergenzradius $R=\infty$. Daher gilt

   $$f(z)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-i}\cdot(z+i)^n}{n!}}{(z+i)^{30}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-i}}{n!}\cdot(z+i)^{n-30}=\sum_{m=-30}^{\infty}a_m\cdot(z-z_0)^m\ \text{ mit }\ a_m=e^{-i}\cdot\frac{1}{(m+30)!}\,.$$

   Das zeigt, dass $(-i)$ ein Pol von f mit der Ordnung 30 ist.

4. $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$, $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$.

   Es gibt zwei isolierte Singularitäten: $z_1=1$, $z_2=-1$.

Laurent-Entwicklung am Punkt $z_1 = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{z-1} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}}_{(*)} .$$

Die größte Scheibe mit Zentrum $z_1 = 1$, für die $(*)$ holomorph ist, ist $D(1,2)$. Demnach lässt sich $\frac{1}{1+z}$ als Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ mit Konvergenzradius 2 schreiben. Die Laurentreihe von f mit Zentrum $z_1 = 1$ ist daher von der folgenden Form:

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = (-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-1)^n .$$

Das ist eine Polstelle der Ordnung 1: $a_n = 0,\ n < -1$ und $a_{-1} = -\frac{1}{2}$. Die Koeffizienten a_n mit $n \geq 0$ kann man wie folgt berechnen:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+1+z-1} = \frac{1}{2\cdot(1+\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2}\cdot(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-1)^n \implies a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \text{ für } \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 .$$

Übung: Eine ähnliche Rechnung für $z_2 = -1$ zeigt, dass dies ebenfalls eine Polstelle der Ordnung 1 ist.

5. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$, $\Omega = \mathbb{C}\setminus\overline{D(0,1)}$, $z_0 = 0$.

   ⚠ Der Punkt $z = 0$ ist keine isolierte Singularität von f. ⚠

   Aber wir können die Laurententwicklung von f mit Zentrum $z_0 = 0$ in Ω berechnen. In Ω haben wir $|z| > 1$, d.h. $|\frac{1}{z^2}| < 1$, und

   $$f(z) = \frac{1}{(-z^2)\cdot(-\frac{1}{z^2}+1)} = \frac{1}{(-z^2)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z^2})^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2\cdot(n+1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot z^n \text{ mit } a_n = 0\ \forall\ n \geq -1 .$$

   Wir sehen auch, dass $a_{-2\cdot k-1} = 0$ und $a_{-2\cdot k} = -1\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

6. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

   $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot z^n$, mit $a_n = 0\ \forall\ n > 0$, und $a_n = \frac{1}{n!}$ für $n \leq 0$. Daher ist der Punkt $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

7. $f(z) = \frac{1}{\cosh(\frac{1}{z})}$ ist definiert und holomorph außer an den Nullstellen von $\cosh(\frac{1}{z})$

   Nullstellen: $\cosh(\frac{1}{z}) = 0 \iff \frac{\exp(\frac{1}{z})+\exp(-\frac{1}{z})}{2} = 0 \iff \exp(\frac{1}{z}) = -\exp(-\frac{1}{z}) \iff \exp(\frac{2}{z}) = -1 = \exp(i\cdot(\pi+2\cdot k\cdot\pi))$ mit $k \in \mathbb{Z}$

   $\iff \frac{2}{z} = i\cdot(\pi+2\cdot k\cdot\pi) \iff \frac{z}{2} = \frac{1}{i\cdot(\pi+2\cdot k\cdot\pi)} \iff z = z_k = \frac{-2\cdot i}{\pi+2\cdot k\cdot\pi}$

   Es gilt $z_k \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$

   Daher: 1) Alle z_k's sind isolierte Singularitäten, 2) $z = 0$ ist keine isolierte Singularität, somit keine wesentliche Singularität!

   Auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sind alle Singularitäten isoliert.

   Wir werden bald sehen, dass alle z_k Polstellen der Ordnung 1 sind. Um das zu beweisen, ist es nützlich einen neuen Begriff einzuführen:

4.14 Nullstellen von holomorphen Funktionen

Definition: Sei f holomorph auf $D(z_0, r)$, dann ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 1$, wenn:

$f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$ für $n = 1$,

$f(z_0) = f'(z_0) = 0$ und $f''(z_0) \neq 0$ für $n = 2$,

$f(z_0) = 0 = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0)$ aber $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ allgemein für $n \geq 2$.

Eigenschaft: Sei f holomorph auf $D(z_0, r)$ und sei z_0 eine Nullstelle der Ordnung N. Dann existiert eine Funktion g, die holomorph auf $D(z_0, r)$ ist, sodass $f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$.

Idee des Beweises:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = (z - z_0)^N \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N} = (z - z_0)^N \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+N} \cdot (z - z_0)^m,$$

da $a_0 = a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$

Man setzt $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+N} \cdot (z - z_0)^N$. Die Funktion g hat den gleichen Konvergenzradius wie die Taylorreihe von f und es gilt $f(z) = (z - z_0)^N \cdot g(z)$, wobei $g(z_0) = a_N \neq 0$, da f eine Nullstelle der Ordnung N hat.

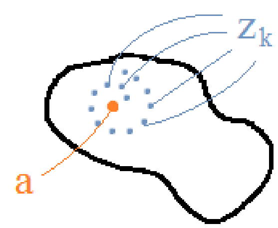
Korollar: Seien f, h holomorph und z_0 eine Nullstelle von f der Ordnung N. Wenn $h(z_0) \neq 0$, dann hat $\frac{h(z)}{f(z)}$ eine Polstelle bei z_0 der Ordnung N.

Beweis: $\frac{h(z)}{f(z)} = \frac{h(z)}{(z-z_0)^N \cdot g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^N} \cdot \frac{h(z)}{g(z)}$. Da $g(z_0) \neq 0$, ist $\frac{h(z)}{g(z)}$ holomorph in einer Umgebung von z_0

Also ist $\frac{h(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\neq 0$ und $\frac{h(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N} = \sum_{m \geq -N}^{\infty} a_{m+N} \cdot (z - z_0)^m = \frac{a_0}{(z-z_0)^N} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{N-1}} + \ldots$

$a_0 = \frac{h(z_0)}{g(z_0)} \neq 0$ wenn $h(z_0) \neq 0$. □

Satz (beschreibt eine sehr wichtige Eigenschaft von holomorphen Funktionen): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei f holomorph auf Ω und seien $z_k \in \Omega$ Nullstellen von f. Wenn ein $a \in \Omega$ existiert sodass $z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \in \Omega$, dann ist $f(z) = 0 \quad \forall\, z \in \Omega$.
(OHNE BEWEIS)



Anders gesagt: Alle Nullstellen von holomorpen Funktionen sind isoliert.

Nicht-Beispiel: $\cosh(\frac{1}{z})$, $z_k = \frac{-2 \cdot i}{\pi + 2 \cdot k \cdot \pi}$

$\cosh(\frac{1}{z_k}) = 0$ für $z_k \to 0$. Aber $z = 0$ ist nicht im Definitionsbereich von f, so dass es kein Gegenbeispiel zum Satz ist.

4.15 Meromorphe Funktionen

Erinnerung: Sei U eine Untermenge von $\mathbb{C}$. Der *Abschluss* $\overline{U}$ *von* U ist definiert als die Menge aller Grenzwerte von konvergierenden Folgen von Elementen aus U.

Wenn $U \subset \Omega$, dann ist der *Abschluss von* U *in* Ω die Menge aller Grenzwerte von konvergierenden Folgen von Elementen aus U, die in Ω sind.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, offen. Eine Funktion f heißt meromorph auf Ω wenn $\{az_n\}_{n=0}^{N} \subset \Omega$ mit $N \leq \infty$ existiert, so dass f auf $\Omega \backslash \{z_n\}$ definiert und holomorph ist, $\overline{\{z_n\}} = \{z_n\}$ in Ω ist, und alle z_n Polstellen von f sind.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf Ω heißt $M(\Omega)$.

Bemerkung: Holomorphe Funktionen sind meromorph.

Satz: $M(\Omega)$ ist ein Körper. Anders gesagt, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in M(\Omega)$ gilt $\alpha \cdot f, f + g, f \cdot g$ und, für $g \not\equiv 0$, $\frac{f}{g} \in M(\Omega)$.

Beispiele:

a) $\frac{1}{(z-z_0)^N}$ $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.
Holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$, und meromorph auf $\mathbb{C}$.

b) $\frac{P(z)}{Q(z)}$; P, Q Polynome.

Meromorph auf $\mathbb{C}$, da holomorph außer an den Nullstellen von Q.

c) Die Funktion $\exp(\frac{1}{z})$ ist nicht meromorph auf $\mathbb{C}$, weil $z = 0$ eine wesentliche Singularität ist: $\exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^n}}_{z^{-n}}$ (unendlich viele nichtverschwindende Koeffizienten a_n mit $n < 0$). Aber $\exp(\frac{1}{z})$ ist meromorph auf $\mathbb{C}^*$.

d) $\ln(z)$ ist nicht meromorph auf $\mathbb{C}$ (⚠egal welcher Zweig!)

e) Wenn $\alpha \notin \mathbb{Z}$, so ist die Funktion $z^\alpha := \exp(\alpha \cdot \ln(z))$ nicht meromorph auf $\mathbb{C}$.

f) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$.

Nullstellen: $\sin(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Die Menge $\{\alpha_i\}$ aus der Definition ist gleich $\{n \cdot \pi\}_{n \in \mathbb{Z}}$, und somit abgeschlossen.

Daher ist $\frac{1}{\sin(z)}$ meromorph auf $\mathbb{C}$, und damit auch auf jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$.

g) $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$.

f ist definiert für $z \neq 0$ und $\sin(\frac{1}{z}) \neq 0$,

$\sin(\frac{1}{z}) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{z} = n \cdot \pi$ für $n \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \backslash \{0\} \Longleftrightarrow z = \frac{1}{n \cdot \pi}$. Der Definitionsbereich ist also $\mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{n \cdot \pi}\}_{n \in \mathbb{Z}^*})$

⚠$\{\frac{1}{n \cdot \pi}\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ ist nicht abgeschlossen, weil $\frac{1}{n \cdot \pi} \xrightarrow[|n| \to \infty]{} 0$.

Aber $\{0\} \cup \{\frac{1}{n \cdot \pi}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ ist abgeschlossen.

$a_n = \frac{1}{n \cdot \pi}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sind isolierte Singularitäten, $z = 0$ ist allerdings keine isolierte Singularität $\Longrightarrow \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ ist nicht meromorph auf $\mathbb{C}$. Jedoch ist $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ meromorph auf $\mathbb{C}^*$, weil alle Singularitäten von $\frac{1}{\sin(1/z)}$ in $\mathbb{C}^*$ sind Polstellen. Das folgt aus folgender Rechnung: Es gilt $f'(z) = \sin(\frac{1}{z})' = \frac{-\cos(\frac{1}{z})}{z^2}$,

und somit gilt für $n \in \mathbb{Z}^*$, dass $f'(a_n) = -\frac{\cos(n \cdot \pi)}{(\frac{1}{n \cdot \pi})^2} = (n \cdot \pi)^2 \cdot (-1) \neq 0$. Es folgt, dass $\sin(\frac{1}{z})$ Nullstellen a_n von erster Ordnung hat.

Daher sind die a_n's Polstellen erster Ordnung von $1/\sin(\frac{1}{z})$.

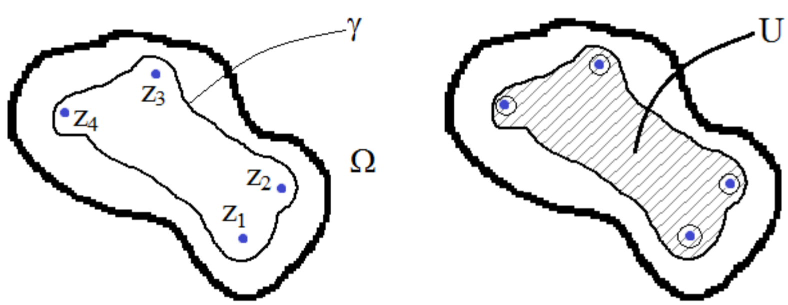
Definition: Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ auf $D(z_0, r)$ mit $r > 0$. Dann heißt a_{-1} das Residuum von f am Punkt z_0. Man schreibt

$$Res(f, z_0) = a_{-1} .$$

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass $a_{-1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot i} \int_{\partial D(z_0, r)} f(z)\, dz$.

Satz (Residuensatz): Sei f holomorph auf Ω außer an isolierten Singularitäten $\{z_i\}$. Sei U offen mit $\overline{U} \subset \Omega$ und mit einem Rand ∂U der eine stückweise differenzierbare Kurve bildet. Seien $\{z_1, \ldots, z_N\}$ die Singularitäten von f in U: $\{z_1, \ldots, z_N\} = \{z_i\} \cap U$. Dann gilt

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \sum_{n=1}^{N} Res(f, z_n) .$$



Sei $\gamma = \partial U$. Wir betrachten $V = U \backslash \cup_{n=1}^{N} \overline{D(z_n, \epsilon)}$, wobei ϵ so klein gewählt ist, dass $\overline{D(z_n, \epsilon)} \subset U$. Dann ist f holomorph auf V und

$\int_{\partial V} f(z)\, dz = 0$

Es gilt $\partial V = \gamma \cup [-\partial D(z_1,\epsilon)] \cup [-\partial D(z_2,\epsilon)] \cdots \cup [-\partial D(z_N,\epsilon)]$, und daher $\int_\gamma f\, dz = \underbrace{\int_{\partial D(z_1,\epsilon)}}_{=2\cdot\pi\cdot i\cdot Res(f,z_1)} + \cdots + \underbrace{\int_{\partial D(z_N,\epsilon)}}_{=2\cdot\pi\cdot i\cdot Res(f,z_N)} f(z)\, dz = 2\cdot\pi\cdot i \sum_{n=1}^{N} Res(f,z_i)$

$\square$

Zurück zum Beispiel: $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, $z \neq 0$, $z \neq \frac{1}{2\cdot\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Frage: Was sind die Residuen von f an $z_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$?

Wir haben schon gesehen, dass die a_n's Polstellen erster Ordnung sind, also ist $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$.

Daher gilt $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)(\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n) = \lim_{z\to z_0} (a_{-1} + (z-z_0)\cdot(a_0 + O(\mid z-z_0 \mid) = a_{-1}$.

Diese Rechnung zeigt folgendes:

$$\boxed{\text{Für Nullstellen erster Ordnung ist } a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot f(z).}$$

Wir müssen also $\lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{\sin(\frac{1}{z})}$ berechnen.

Fakt: de l'Hôpital gilt auch im Komplexen.

Bei $z_n = \frac{1}{n\cdot\pi}$ haben wir daher $\lim_{z\to z_0} \frac{z-z_n}{\sin(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to z_n} \frac{1}{\frac{-\cos(\frac{1}{z})}{z^2}} = -\frac{z_n^2}{\cos(\frac{1}{z_n})} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n\cdot\pi)^2}$.

Bemerkung: $\lim_{z\to z_n} \frac{f(z)-f(z_n)}{z-z_n} = f'(z_n)$. Falls $f(z_n) = 0$, so ist $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{z-z_n} = f'(z_n) \Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_n}{f(z)} = \frac{1}{f'(z_n)}$. Die de l'Hôpital Regel folgt direkt aus dieser Rechnung.