MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK UND ASTROPHYSIK
INSTITUT FÜR ASTROPHYSIK

Das Cauchy-Problem

J. Ehlers
H. Friedrich
A. Rendall
B.G. Schmidt

Max-Planck-Institut für Astrophysik
Karl-Schwarzschild-Str. 1
8046 Garching b. München
FRG

Karl-Schwarzschild-Strasse 1 · 8046 Garching bei München

Vorbemerkung

Der folgende Text gibt in etwas ergänzter Form den Inhalt von vier Vorträgen wider, die die Autoren während des 53. Heraeus-Seminars über "Aktuelle Entwicklungen in Gravitation und Relativitätstheorie" gehalten haben, das in der Zeit vom 11.–15. September 1989 im Physikerzentrum der DPG in Bad Honnef stattfand. Die Absicht war, einem oft vernachlässigten, wichtigen Aspekt der Untersuchung klassischer Feldtheorien, insbesondere der Allgemeinen Relativitätstheorie, so darzustellen, daß das Ineinandergreifen physikalischer Vorstellungen und mathematischer Begriffsbildungen, die wichtigsten Fragestellungen und Methoden sowie einige Hauptergebnisse sichtbar werden. Unsere Darstellung soll eine *Einführung* sein; wir erheben keinen Anspruch auf Originalität und erst recht nicht auf Vollständigkeit. Dementsprechend haben wir aus der zitierten Literatur übernommen, was uns wichtig schien und in das Konzept paßte.

Inhalt

DAS CAUCHY-PROBLEM

1. Einführung

Der physikalische Gehalt einer klassischen Feldtheorie ist in den Eigenschaften der Lösungen ihrer Feldgleichungen „verborgen“. Man möchte zeigen, daß diese Eigenschaften die Phänomene widerspiegeln, die die Formulierung der Theorie motivierten, und man hofft unerwartete Eigenschaften der Lösungen zu finden, die zur Suche nach bisher unbeobachteten Phänomenen Anlaß geben. Häufig gelingt es durch die Analyse einiger weniger expliziter Lösungen zusammen mit einer einfallsreichen physikalischen Ausdeutung, sich ein weitreichendes Bild über einen gewissen Teil der Theorie zu beschaffen. Aber die Möglichkeiten, Eigenschaften, die aus speziellen Lösungen abgelesen werden, auf allgemeinere Situationen zu übertragen, sind begrenzt. So gibt in Einstein's Theorie das Verhalten spezieller Lösungen im Großen zwar Anlaß zu Vermutungen, welches Verhalten allgemeinere Lösungen zeigen könnten („Singularitäten“, „Kosmische Zensur“, „Asymptotik“, „Beziehung zwischen Quelle und Fernfeld“ etc.) aber zwingende Argumente für diese Vermutungen haben sich bisher nur in wenigen Fällen geben lassen, und es ist nicht zu erwarten, daß man hier allein durch das Studium spezieller expliziter Lösungen viel weiter kommen wird. Häufig ist es sogar schwierig, aufgrund der vorliegenden Lösungen präzise Formulierungen unserer Vermutungen zu geben. Ähnliche Bemerkungen treffen auf formale Näherungsverfahren zu; ihre Geltung ist ungewiß.

Unter diesen Umständen erscheint es notwendig den Versuch zu machen, den betrachteten Problemen durch Anwendung der „allgemeinen Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen“ auf den Leib zu rücken. Diese Aussage ist bewußt etwas vage, um den falschen Eindruck zu vermeiden, man brauche nur einfach den Apparat der Theorie der PDgln auf unsere Fragen loszulassen, um in jedem Fall die gewünschten Antworten zu erhalten. Statt dessen muß gewöhnlich einige Arbeit geleistet werden, um die Fragen, die sich im Zusammenhang mit den gegebenen Feldgleichungen stellen, so aufzubereiten, daß man aus der allgemeinen Theorie der PDgln Nutzen ziehen kann. Das verlangt einen Spagat zwischen der gegebenen Feldtheorie und der Theorie der PDgln, den man nur dann graziös vollführen kann, wenn man weiß, wohin man treten muß, um festen Boden unter die Füße zu bekommen. In anderen Worten: Um das Problem aufzubereiten, muß ich herausfinden, welche Methoden der Lösungs- bzw. Existenztheorie auf mein Problem anwendbar sein könnten.

Es hat sich herumgesprochen, daß bei der Untersuchung von Theorien, die eine Beschreibung von zeitlichen Entwicklungsprozessen anstreben, die Untersuchung des Cauchy-Problems von Bedeutung ist. Wir wollen dies am Fall der Einsteinschen Feldgleichungen, der uns besonders interessiert, diskutieren. Dabei werden wir keine Anstrengungen unternehmen, alle bisher erhaltenen Ergebnisse vorzutragen, sondern wir wollen versuchen, die oben beschriebene Gymnastik zu illustrieren. Wir hoffen, damit eine Vorstellung über den möglichen Nutzen der Analyse des Cauchy-Problems zu vermitteln und einen Zugang zur Literatur zu schaffen.

Wir werden im Folgenden zunächst grundlegende Begriffe, Fragestellungen und Methoden diskutieren, die sich als nützlich erwiesen haben zur Untersuchung der

— Eigenschaften von Feldgleichungen („kausale Propagation“, „Abhängigkeitsgebiete“, etc.),
— Lösungsgesamtheit einer Feldgleichung und ihrer Charakterisierung durch geeignete „Cauchy-Daten“,
— Frage der Existenz spezieller Lösungsklassen (Auftreten von „Stoßwellen“ oder „Singularitäten“, „topologische Eigenschaften“, etc.) und eventuell ihrer Spezifierung durch Bedingungen an die zugehörigen Cauchy-Daten.

Danach werden wir untersuchen, wie sich die Einsteingleichungen in die allgemeine Theorie der PDgln einfügen und welche Besonderheiten sich aus dem Tensorcharakter bzw. der "allgemeinen Kovarianz" der Feldgleichungen ergeben.

Gliederung der Vorlesungsreihe:

1. Überblick über Probleme, die bei der Untersuchung von PDgln auftreten, Motivierung der Grundfragen, Einführung des Begriffs der Charakteristik.
2. Diskussion des Falles eines Systems linearer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.
3. Der Begriff der „Hyperbolizität“, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen im Fall allgemeiner hyperbolischer Gleichungen.
4. Analyse der Einstein-Gleichungen.

Wir wollen nicht den Eindruck erwecken, daß wir in vier Vorlesungsstunden alles über das Cauchy-Problem sagen könnten, was der geneigte Leser schon immer wissen wollte. Die Literatur über PDgln ist unübersehbar, und es kann uns nur darum gehen, Diplomanden, Doktoranden und ...... einen ersten Eindruck zu vermitteln.

2. Bezeichnungen, Annahmen und Beispiele

Wir gehen davon aus, daß jeder, der diese Zeilen liest, weiß, was eine partielle Differentialgleichung ist und daß deren Ordnung durch die höchste auftretende Ableitung gegeben ist (den Fall, daß Ableitungen beliebiger Ordnung auftreten, wollen wir anderen überlassen). Im Folgenden betrachten wir „*bestimmte Systeme*“ von PDgln. Dabei handelt es sich um Systeme, bei denen die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der gesuchten Unbekannten übereinstimmt. Obwohl obige Bezeichnung den Eindruck erweckt, als ob damit schon viel bestimmt sei, ist die genannte Forderung sehr schwach. Durch dreimaliges Hintereinanderschreiben der Gleichung

$$\operatorname{div} B = 0$$

der Elektrodynamik erhalten wir ein bestimmtes System, das aber doch nur eine Bedingung an drei unbekannte Funktionen enthält. Haben wir weniger (mehr) Gleichungen als Unbekannte, so heißt das System unterbestimmt (überbestimmt).

Es gibt eine große Zahl von elementaren Umformungen von PDgln (Transformationen der unabhängigen Variablen und/oder der Unbekannten, formales Differenzieren der Gleichung, Einführung von Ableitungen der ursprünglich Unbekannten als zusätzliche Unbekannte. Wir werden später einige davon kennenlernen). Diese erlauben es sehr häufig, eine gegebene PDgl auf die Form zu bringen, die wir im Folgenden betrachten werden und die für die Anwendungen bei weitem die wichtigste ist.

Um nicht im Wust der Möglichkeiten unterzugehen, konzentrieren wir uns von nun an im wesentlichen auf Systeme von PDgln 1. bzw. 2. Ordnung der Form („unsere PDgl”)

$$(\alpha)\ A^i\partial_i u + b = f(x) \qquad\qquad (\beta)\ A^{ik}\partial_i\partial_k u + b = f(x)$$

für eine abhängige Variable oder Unbekannte u:

$$V \ni x \to u(x) \in \mathbf{C}^N \quad , \qquad V \text{ eine offene Teilmenge des } \mathbf{R}^{n+1} \quad .$$

Hier sind n, N gegebene natürliche Zahlen ≥ 1, ∂_i bedeutet die partielle Ableitung nach der Koordinate x^i und wir verwenden die Summationskonvention. Manchmal werden wir auch einen $\mathbf{R}^N$ als Bildbereich betrachten, aber für den größeren Teil der Diskussion ist die Wahl des Bildbereiches nicht wichtig.

Die Funktionen

$$(\alpha)\ A^i = A^i(x,u) \qquad\qquad (\beta)\ A^{ik} = A^{ik}(x,u,\partial_j u) \quad ,$$

die Werte in der Menge $M_{N\times N}$ der komplexen $N \times N$ Matrizen annehmen und die Funktionen

$$(\alpha)\ b = b(x,u) \qquad\qquad (\beta)\ b = b(x,u,\partial_i u) \quad ,$$

sowie die auf V definierte Funktion $f = f(x)$, die Werte im $\mathbf{C}^N$ annehmen, werden als gegeben betrachtet. Wir wollen annehmen, daß die Funktionen A^i, A^{ik}, b in einem gewissen

Bereich ihrer Argumente „hinreichend glatt" (auf jeden Fall stetig) sind. Besonders bequem wäre es, wenn sie auf

$$(\alpha)\; V \times \mathbb{C}^N \qquad\qquad (\beta)\; V \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N(n+1)}$$

definiert und glatt oder sogar analytisch wären, aber in vielen interessanten Fällen ist das nicht so. Beispielsweise handelt es sich hier bei den Einsteingleichungen in ihrer üblichen Darstellung um rationale Funktionen.

Von einer Lösung u unserer PDgl wollen wir zunächst annehmen, daß

$$(\alpha)\; u \in C^1(V, \mathbb{C}^N) \qquad\qquad (\beta)\; u \in C^2(V, \mathbb{C}^N) \quad ,$$

so daß die linke Seite unserer Gleichung nach Einsetzen von u stetig ist.

Wir wollen noch einige Begriffe einführen, die einfach sind, aber eine wichtige Rolle spielen. Der Teil einer PDgl, der die Ableitungen höchster Ordnung enthält, in unserem Fall

$$(\alpha)\; A^i\, \partial_i u \qquad\qquad (\beta)\; A^{ik} \partial_i \partial_k u \quad ,$$

heißt ihr „*Hauptteil*". Ist der Hauptteil „linear in den höchsten Ableitungen", wie es bei unserer Gleichung der Fall ist, so heißt die Gleichung „*quasilinear*". Gilt darüber hinaus $A^i = A^i(x)$ bzw. $A^{ik} = A^{ik}(x)$, d.h. die Funktionen im Hauptteil, die vor den Ableitungen höchster Ordnung auftreten hängen nicht von der Unbekannten oder ihren Ableitungen ab, so heißt die Gleichung „*semilinear*". Ist zudem noch die Funktion b linear in u und seinen Ableitungen, so heißt die Gleichung „*linear*".

Es gibt natürlich auch interessante Gleichungen, die nicht quasi-linear sind, wie z.B. die Hamilton-Jacobi bzw. Eikonalgleichung, der wir später noch begegnen werden, die Gleichung zur Bestimmung von Flächen mit vorgegebener Gauß-Krümmung, allgemeine Monge-Ampère-Gleichungen, die in der Differentialgeometrie eine Rolle spielen, oder Gravitationsfeldgleichungen mit Gauß-Bonnet Termen. Euler-Lagrange-Gleichungen zu einer in den höchsten Ableitungen nichtlinearen Lagrangedichte sind quasilinear (können aber, wie wir am Beispiel der Gravitationsfeldgleichungen mit Gauß-Bonnet Termen lernen (vergl. [1]), „echt nicht-linear" werden, wenn man zusätzliche Folgerungen aus dem Variationsprinzip in Betracht zieht, um sie zu „vereinfachen"). In vielen Fällen lassen sich aus echt nichtlinearen Gleichungen quasilineare gewinnen. Ist uns z.B. eine skalare PDgl der Form

$$F(\partial_j u, u, x) = 0$$

gegeben, die nicht quasilinear ist, so erhalten wir daraus (falls F differenzierbar ist! Es werden durchaus echt nichtlineare PDgl studiert, wo das nicht notwendig der Fall ist) durch formales Ableiten nach den x^k die n quasilinearen Gleichungen

$$\partial_{p_j} F\, \partial_k \partial_j u + \partial_u F\, \partial_k u + \partial_k F = 0 \quad .$$

Wir erhalten also ein überbestimmtes System für eine Unbekannte u, und wir müssen außerdem noch die ursprüngliche Gleichung als eine Art Zwangsbedingung mitberücksichtigen. Wir wollen offen lassen, ob dieses Verfahren dem gegebenen Problem immer angemessen ist.

Falls man PDgln auf Mannigfaltigkeiten betrachten will, ist es wichtig zu wissen, daß die Eigenschaft einer PDgl, quasilinear bzw. semilinear bzw. linear zu sein, invariant unter Koordinatentransformationen ist. Unter einer Transformation $x^i = x^i(x^{i'})$ folgt, falls die Komponenten von u wie Skalare transformiert werden (was wir in den ersten drei Vorlesungen annehmen wollen), z.B. im Fall der Gleichung zweiter Ordnung:

$$A^{ik}(x,u,\partial_j u)\partial_i\partial_k u = A^{ik}(x,u,\partial_j x^{j'}\partial_{j'}u)\partial_i x^{i'}\partial_k x^{k'}\partial_{i'}\partial_{k'}u + \text{Terme in } u \text{ und } \partial_{i'}u \quad .$$

Insbesondere sehen wir, daß die Komponenten der Matrix A^{ik}, die den Hauptteil definiert, im semilinearen Fall wie kontravariante Tensoren transformiert werden.

Beispiele:

1.) Laplace-Gleichung $\quad \Delta_{n+1}u := \sum_{i=1}^{n+1}(\partial_i)^2 u = 0$

Klein-Gordon-Gleichung $\quad \left\{(\partial_t)^2 - \Delta_n + m^2\right\} u = 0$

Wärmeleitungsgleichung $\quad \{\partial_t - \Delta_n\} u = 0$

Schrödingergleichung $\quad \left\{\frac{1}{i}\partial_t - \Delta_n\right\} u = 0 \quad .$

Diese Gleichungen sind alle linear und haben konstante Koeffizienten. Die letzte Eigenschaft geht verloren, wenn wir Koordinatentransformationen durchführen oder wenn wir die Metriken, die in die Definition der Gleichungen eingehen, durch nichtflache Metriken ersetzen.

2.) Yang-Mills-Gleichungen ohne Quellen für ein Eichpotential A_i und ein Eichfeld F_{ik} (die als Lie-Algebra-wertige 1– bzw. 2– Formen betrachtet werden)

$$\nabla_i A_j - \nabla_j A_i + [A_i, A_j] = F_{ij}$$
$$\nabla^i F_{ij} + \left[A^i, F_{ij}\right] = 0 \quad .$$

Hier bedeutet ∇ die kovariante Ableitung in der gegebenen Raumzeit, und Indexoperationen werden mit der gegebenen Metrik durchgeführt. Diese Gleichungen sind semilinear, aber nur „scheinbar" bestimmt. Aus der ersten Gleichung folgt durch Ableiten, zyklisches Vertauschen der Indizes und Summation die Bianchi-Identität, die als weitere Gleichung für das Eichfeld F_{ij} betrachtet werden kann. Im speziellen Fall der Maxwell-Gleichungen entkoppeln die Gleichungen für das Potential von den Gleichungen für die Feldstärken, die sich dann bekanntermaßen schreiben lassen:

$$\left.\begin{array}{lll} \partial_t E = \mathrm{rot} B & \partial_t B = -\mathrm{rot} E & \text{„Entwicklungsgln.", bestimmt} \\ \mathrm{div} E = 0 & \mathrm{div} B = 0 & \text{„Zwangsgln.", unterbestimmt} \end{array}\right\} \text{überbestimmt}$$

Die Entwicklungsgleichungen sind ein Beispiel eines „symmetrisch hyperbolischen Systems" wie wir es später kennenlernen werden. Für allgemeinere Eichfeldgleichungen läßt sich in ähnlicher Weise ein gekoppeltes symmetrisch hyperbolisches System von Entwicklungsgleichungen für das Eichfeld und das Eichpotential herleiten. Eine andere Methode, aus den

Yang-Mills-Gleichungen Entwicklungsgleichungen zu bekommen, für die man über eine gute Theorie verfügt, besteht darin, aus den Yang-Mills-Gleichungen ein System zweiter Ordnung für das Eichpotential herzuleiten. Kontrahiert man die erste Gleichung mit ∇^i, verwendet beide Gleichungen, um F_{ij} und seine Ableitungen zu eliminieren, vertauscht einmal kovariante Ableitungen und fordert, daß die „Eichbedingung“

$$\nabla^i A_i = 0$$

erfüllt ist (von der man zuvor natürlich zu zeigen hat, daß sie erfüllt werden kann!), so erhält man das Gleichungssystem

$$\nabla^i \nabla_i A_j - R^i_j A_i + 2\left[A^i, \nabla_i A_j\right] - \left[A^i, \nabla_j A_i\right] + \left[A^i, [A_i, A_j]\right] = 0 \quad ,$$

wobei R_{ij} den Riccitensor der gegebenen Raumzeit bezeichnet. Wir werden später über den Typ dieser Gleichung einiges sagen.

3.) Euler-Gleichung und Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik mit gegebener Funktion $p = p(\rho)$

$$\begin{aligned} &\partial_t v^\alpha + v^\beta \partial_\beta v^\alpha = -\frac{1}{\rho} p'(\rho) \partial_\alpha \rho \quad \alpha = 1, 2, 3 \\ &\partial_t \rho + \partial_\beta(\rho v^\beta) = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen ein quasilineares System dar.

4.) Die Einstein-Gleichungen haben in der üblichen Darstellung die Form unserer PDgl (β) wobei die Metrik g_{ik} die Unbekannte u darstellt und die Komponenten der Matrix A^{ik} durch die kontravarianten Komponenten g^{ik} der Metrik bestimmt sind. Die Gleichungen sind quasilinear und alles Weitere erfahren wir in den Abschnitten 14 bis 18.

Die meisten (gewöhnlichen oder partiellen) Differentialgleichungen der Physik, die Wechselwirkungen beschreiben, sind nichtlinear. Die wesentliche Ausnahme macht die Schrödingergleichung für mehrere wechselwirkende Teilchen. Darauf beruht es, daß in der Quantenmechanik mehr exakte Aussagen über wechselwirkende System bekannt sind als in anderen Theorien.

3. Das Cauchy-Problem „in allgemeiner Form"

Wir stellen uns vor, unsere PDgl beschreibe ein System, das eine irgendwie parametrisierte Abfolge von Zuständen durchläuft. Wir wissen, daß wir im Falle einer gewöhnlichen Differentialgleichung die durchlaufenen Zustände eindeutig bestimmen können, wenn wir zu einem festen Parameterwert den Zustand, seine momentane Änderungsgeschwindigkeit etc. vorgeben. Wir wollen versuchen, im Fall unserer PDgl in ähnlicher Weise vorzugehen. Dazu nehmen wir an:

i) in V sei eine Hyperfläche S der Klasse C^1 ausgezeichnet, auf der der Anfangszustand unseres Systems spezifiert werden soll. Sie kann lokal immer durch eine „definierende Funktion" beschrieben werden, d.h. durch eine Funktion

$$\Phi \in C^1(V,\mathbb{R}) \text{ mit } 0 \in \Phi(V), d\Phi \neq 0 \text{ so daß } S = \{x \in V/\Phi(x) = 0\} \quad .$$

Natürlich besteht in der Wahl von Φ außerhalb von S viel Freiheit.

ii) Auf V sei ein Vektorfeld $X = \eta^i\partial_i$ gegeben, das zu S transversal (d.h.: nicht tangential) ist, so daß $\langle d\Phi, X\rangle = \eta^i\partial_i\Phi \neq 0$ ist auf S.

Es wird für uns im Folgenden wichtig sein, zwischen Ableitungen zu unterscheiden, die in der (tangential zur) Hyperfläche S ausgeführt werden und solchen, die aus S hinausführen. Da wir, ausgehend nur von unserer PDgl, auf S nicht über eine „Normalenableitung" verfügen, die in natürlicher Weise durch die Gleichung oder darin verwendete Strukturen ausgezeichnet ist, müssen wir ein Vektorfeld auszeichnen, um sagen zu können, was eine hinausführende Ableitung ist.

iii) Auf S seien Funktionen, die *Cauchy-Daten*, gegeben, d.h. Funktionen

$$(\alpha)\ u_0 : S \to \mathbb{C}^N \qquad (\beta)\ u_0, u_1 : S \to \mathbb{C}^N$$

die „hinreichend glatt" sind.

Das „Cauchy-Problem mit Cauchy-Daten auf S" für unsere PDgl besteht nun darin, eine Lösung der folgenden Aufgabe zu finden:

$$(\alpha)\ A^i\partial_i u + b = f(x) \quad \text{auf } V; \qquad u = u_0 \quad \text{auf } S$$

$$(\beta)\ A^{ik}\partial_i\partial_k u + b = f(x) \quad \text{auf } V; \qquad u = u_0,\ \langle du, X\rangle = u_1 \text{ auf } S.$$

Hätten wir Gleichungen höherer Ordnung betrachtet, hätte die Aufgabe die Form

(γ) PDgl der Ordnung m auf V erfüllt ; Ableitungen von u in Richtung von X bis zur Ordnung $m-1$ vorgegeben auf S.

erhalten. Wir haben die Formulierung des Cauchy-Problem hier „allgemein" genannt, weil wir bisher keine Eigenschaften der Gleichungen ausgezeichnet oder benutzt haben.

Wir könnten aber noch allgemeinere Probleme betrachten, etwa Anfangswertaufgaben für Gleichungen auf Mannigfaltigkeiten etc.

Nachdem wir das Problem mit leichter Hand hingeschrieben haben, ergeben sich sofort die

GRUNDFRAGEN:

i) Existieren Lösungen zu unserem Cauchy-Problem?
ii) Sind Lösungen des Problems eindeutig bestimmt?

Eine offensichtliche Bedingung, die erfüllt sein muß, bevor wir versuchen können, eine positive Antwort auf die erste Frage zu geben, ist natürlich, daß die Cauchy-Daten in dem Bereich liegen, in dem die Funktionen A^i, A^{ik}, b definiert sind. Wir werden aber sehen, daß die wirklichen Probleme von viel subtilerer Natur sind. Wenn man anfängt, sich auf das Problem einzulassen, tauchen sofort viele weiterführende Fragen auf:

iii) In welchem Bereich der unabhängigen Variablen können wir die Existenz bzw. die Eindeutigkeit von Lösungen erwarten? Vielleicht müssen wir die Menge V einschränken? Existieren Lösungen nur „lokal“ oder auch „global“ (was immer das heißen mag)?

iv) Können wir eine Darstellung der Lösung (am liebsten durch sin und cos, aber wir wären auch schon für eine Integraldarstellung dankbar) erwarten? Oder müssen wir uns damit begnügen, in abstrakter Weise über Existenz und Eindeutigkeit zu reden und eventuell qualitative Eigenschaften der Lösungen zu beweisen?

v) Was müssen wir über die Glattheit der Koeffizienten und der Daten annehmen, was folgt über die Glattheit der Lösungen? Können wir etwas über die Beschränktheit, das Anwachsen, das Abfallverhalten der Lösungen sagen?

vi–x) ....?......?......?...?..?.???

Im Folgenden wollen wir nicht versuchen, für eine spezielle Gleichung und gegebene Anfangsdaten das eine oder andere dieser Probleme zu lösen, sondern die Frage studieren:

Für welche Gleichungen und Hyperflächen lassen sich befriedigende Antworten geben?

4. Der Satz von Cauchy-Kowalewskaya

Wir betrachten jetzt ein „*C.-P.*-artiges“ Anfangswertproblem mit einer Gleichung der Ordnung $m \geq 1$ in „aufgelöster Form“:

$$(*)\begin{cases} \partial_t u = H(t,x,\{(\partial_1)^{i_1}\dots(\partial_n)^{i_n}u\}_{i_1+\dots+i_n\leq m}) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

für eine Unbekannte

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \supset V \ni (t,x) \to u(t,x) \in \mathbf{C}^{N'} \quad .$$

Die $\mathbf{C}^{N'}$-wertige Funktion H und das Anfangsdatum

$$\{0\}\times\mathbf{R}^n \cap V \ni (0,x) \to u_0(x) \in \mathbf{C}^{N'} \quad .$$

sind gegeben.

Die Gleichungen heißen „in aufgelöster Form“, weil links die aus der Anfangsfläche $\{\ t=0\ \}$ hinausführende Ableitung der Unbekannten steht und rechts nur noch innere Ableitungen auf den Flächen $\{\ t = \text{ const }\}$ stehen.

Wir nennen das Problem „*C.-P.*-artig“, weil es nicht notwendig ein Cauchy-Problem im vorher eingeführten Sinne ist: Die Ordnung m kann größer als 1 sein, wir geben aber nur ein Anfangsdatum vor. Anfangswertaufgaben für die Wärmeleitungsgleichung und die Schrödinger-Gleichung werden natürlicherweise in dieser Form gegeben (evtl. mit Zusatzbedingungen). Aber auch Cauchy-Probleme für die Klein-Gordon-Gleichung, die Laplace-Gleichung (z.B. mit $t := x^{n+1}$), die Maxwell-Gleichungen und die angegebenen hydrodynamischen Gleichungen, jeweils mit Daten auf der Fläche $\{\ t = 0\ \}$, sind von dieser Form oder lassen sich in diese Form bringen. Wir wollen Letzteres für den Fall der Klein-Gordon-Gleichungen zeigen.

Außer u betrachten wir $u^t := \partial_t u$ und $u^\alpha := \partial_\alpha u$, $\alpha = 1,2,\dots n$, als Unbekannte in unserem neuen System, das gegeben ist durch

$$\partial_t u = u^t,\ \partial_t u^\alpha = \partial_\alpha u^t,\ \partial_t u^t = \sum_\alpha \partial_\alpha u^\alpha - m^2 u \quad .$$

dabei haben wir die Vertauschbarkeit der Ableitungen von u nach t und x^α verwendet. Sind u_0 und u_1 (bezüglich $X = \partial_t$) die für die Klein-Gordon-Gleichungen für $t = 0$ vorgegebenen Cauchy-Daten, so müssen wir für unser System die Anfangsbedingungen

$$u = u_0,\ u^t = u_1,\ u^\alpha = \partial_\alpha u_0 \text{ für } t = 0$$

fordern. Ist dann (u, u^t, u^α) eine einmal stetig differenzierbare Lösung (z.B. für $0 \leq t \leq t_0$ für ein $t_0 > 0$) des neuen Cauchy-Problems, dann läßt sich in folgender Weise zeigen, daß u eine Lösung des ursprünglichen Cauchy-Problems ist. Aus der Form der oben gegebenen Cauchy-Daten folgt, daß die Funktionen $v_{\alpha\beta} := \partial_\alpha u^\beta - \partial_\beta u^\alpha$ für $t = 0$ verschwinden.

Aus der zweiten Gleichung unseres Systems folgt (unter Verwendung distributioneller Ableitungen), daß $\partial_t v_{\alpha\beta} = 0$ und daher $v_{\alpha\beta} = 0$ in dem Bereich, in dem unsere Lösung existiert. Daher gibt es eine Funktion $v = v(t, x^\alpha)$, die in x^α differenzierbar ist und $\partial_\alpha v = u^\alpha$ erfüllt. Aus den Daten folgt, daß für $t = 0$ gilt: $\partial_\alpha v = u^\alpha = \partial_\alpha u$. Daß diese Gleichung überall gilt, folgt aus den ersten beiden Gleichungen unseres Systems, die $\partial_t \partial_\alpha v = \partial_t u^\alpha = \partial_\alpha u^t = \partial_\alpha \partial_t u = \partial_t \partial_\alpha u$ zur Folge haben, wobei wir im letzten Schritt wieder mit distributionellen Ableitungen rechnen. Aus unserem System und der Glattheitsannahme über u, u^t, u^α folgt jetzt unmittelbar, daß u zweimal stetig differenzierbare Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist. Eine entsprechende Diskussion allgemeinerer Gleichungen vom Type der Wellengleichung findet man in [2].

Daß das Problem (*) sinnvoll ist, wird nahegelegt durch die Beobachtung

– Sind u_0, H Funktionen der Klasse C^∞, so wird durch (*) eindeutig eine formale Lösung der Form $u(t,x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) t^n$ bestimmt.

Die u_n lassen sich offensichtlich rekursiv aus (*) ausrechnen. Es erhebt sich nun die Frage, ob diese formale Lösung etwas mit einer „wirklichen" Lösung zu tun hat. Eine Antwort darauf gibt der

Satz von Cauchy-Kowalewskaja:

$$\text{Falls in } (*) \begin{cases} m = 1 \\ u_0 \text{ reell-analytisch im Punkte } x_0 \in \mathbb{R}^n \\ H \text{ reell-analytisch in } (t = 0,\ x_0,\ u_0(x_0),\ \partial_1 u_0(x_0) \ldots,\ \partial_n u_0(x_0)) \end{cases}$$

dann existiert eine Umgebung V von $(t = 0,\ x_0)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, so daß in jeder zusammenhängenden Umgebung $U \subset V$ von $(t = 0,\ x_0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u(t,x)$ des Cauchy-Problems (*) existiert, die in U reell analytisch ist.

Bemerkungen:

i) Mit diesem Satz haben wir unsere erste Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Lösungen eines Cauchy-Problems. Aus dem Eindeutigkeitssatz von Holmgren, den wir später kennen lernen werden, folgt, daß die oben erhaltene Lösung, in geeigneten Umgebungen U, auch eindeutig bestimmt ist in der Klasse von Funktionen, die nur einmal stetig differenzierbar sind.

ii) Der Satz ist sehr nützlich, um eine „erste Orientierung" über die Existenz von Lösungen zu gewinnen und Beispiele bzw. Gegenbeispiele zu konstruieren.

iii) Es gibt inzwischen eine Anzahl verschiedener Beweise des Satzes, die entweder elementare Methoden verwenden, um aus Abschätzungen für die Entwicklungskoeffizienten der Daten direkt Abschätzungen für die Entwicklungskoeffizienten der Lösungen zu erhalten, oder die abstraktere Methoden verwenden (vergl. z.B. [3], [4], [5]). Wir werden hier keinen dieser Beweise geben, weisen aber auf die verschiedenen Möglichkeiten hin, weil man häufig vor Situationen gestellt wird, in denen der Satz, so wie er hier steht, nicht direkt anwendbar ist, aber eine Inspektion eines der Beweise eine geeignete Verallgemeinerung nahelegt.

iv) Es sind verschiedene Verallgemeinerungen des Satzes möglich: Ein entsprechender Satz kann noch bewiesen werden in gewissen Situationen wo H Pole hat, die Funktion H muß nicht unbedingt analytisch von t abhängen etc.

v) Es sei hier darauf hingewiesen, daß die Gleichung nicht unbedingt quasilinear sein muß. Wegen der möglichen Nichtlinearität ist in dem Satz nichts über die „Form und Größe" der Umgebung V ausgesagt; wir haben nur die „Existenz lokal, nahe x_0" erhalten. Sind die Daten reell analytisch auf unserer (reell analytischen) Anfangsfläche S, so erhält man zu jedem Punkt von S eine lokale Lösung. Wegen der Eindeutigkeit lassen sich diese Lösungen „zusammenflicken" zu einer Lösung, die „lokal nahe S" existiert.

vi) Bei der Anwendung des Satzes brauchen wir uns nicht um den „Typ" der gegebenen PDgl zu kümmern und auch die Wahl der (reell analytischen) Anfangsfläche ist beliebig, solange wir die Gleichung in die aufgelöste Form bringen können. Die oben erwähnte Wahl $t = x^{n+1}$ im Fall der Laplace-Gleichung war willkürlich. Auch können wir z.B. Cauchy-Probleme in der Form

$$\left\{(\partial_t)^2 - \Delta_n + m^2\right\} u = 0 \quad ; \qquad u = u_0,\ \partial_1 u = u_1 \text{ für } x^1 = 0$$

mit gegebenen reell-analytischen Funktionen u_0, u_1 der unabhängigen Variablen t, $x^2, \ldots,$ x^n betrachten. Hier ist also die Anfangshyperfläche zeitartig bezüglich der flachen Metrik, die implizit in unserer Gleichung erhalten ist. Durch ähnliche freie Verwendung des Satzes von C.-K. ist zum Beispiel gezeigt worden, daß „ein Stückchen" einer Innenlösung mit idealer Flüssigkeit an die Kerr-Lösung anschließbar ist [6].

v) Die Annahme $m = 1$ im Satz von C.-K. ist wichtig, obwohl wir gesehen haben, daß durch (*) immer eine formale Lösung bestimmt ist! Das folgt aus dem Beispiel:

Aus $\partial_t u = (\partial_x)^2 u$ und $u(0,x) = \sum\limits_{j\geq 0} v_j x^j$ folgt mit dem Ansatz $u(t,x) = \sum\limits_{k,j\geq 0} u_{kj} t^k x^j$, daß $u_{kj} = \frac{(j+2k)!}{j!k!} v_{j+2k}$. Wählen wir als Datum die Funktion $v(x) = (1-x)^{-1}$ in einer Umgebung von $x = 0$, so folgt, daß $u(t,0) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(2k)!}{k!} t^k$, eine Reihe, die nicht konvergiert! Es sei hier aber angemerkt, daß es Lösungen $u(t,x)$ der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung gibt, die z.B. in dem Bereich $t > 0$, $|x| < \frac{1}{2}$ analytisch sind und $\lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = (1-x)^{-1}$ für $|x| < \frac{1}{2}$ erfüllen!

vii) Es stellt sich die generelle Frage, welche Glattheit der Lösungen von Feldgleichungen man verlangen will und kann. Sind analytische Lösungen, wie wir sie hier betrachtet haben, für die Zwecke der Physik ausreichend? Für statische bzw. stationäre Situationen (bei denen im allgemeinen die Felder als Lösungen elliptischer Gleichungen erhalten werden) ist das häufig der Fall. Eine wesentliche Eigenschaft analytischer Funktionen ist ihre „Starrheit", d.h. die Werte einer solchen Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung fixieren die Funktion schon (fast) überall. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zu dem, was man bei dynamischen Prozessen erwartet, bei denen man eine lokale Wirkungsausbreitung beobachtet und „Einschaltvorgänge" eine Rolle spielen. Die Ausbreitung einer Störung in einem ruhenden Medium wird sicher nicht durch eine analytische Funktion beschrieben.

Man könnte es mit „stückweise analytisch“ versuchen, aber dann stellt sich die Frage, was an den „Bruchstellen“ geschieht und wie die verschiedenen analytischen Lösungen zusammengefügt werden sollen. Ein anderer Vorschlag wäre, gegebene Daten der Klasse C^k durch analytische Daten zu approximieren und zu diesen analytische Lösungen zu konstruieren. Dann steht man vor einem neuen Problem: Approximiert die analytische Lösung die gesuchte Lösung zu den C^k-Daten? Damit dieses in jedem Fall geschieht, müßten die Lösungen der gegebenen Gleichung eine gewisse „Stabilität“ aufweisen. Das ist eine Eigenschaft, die auch aus physikalischen Gründen wünschenswert ist: Alle Messungen sind nur von endlicher Genauigkeit. Wenn kleine Änderungen der Daten nach sehr kurzer Zeit schon wesentliche Änderungen der Lösungen zur Folge hätten, wäre die Aussagekraft unserer Theorie sehr gering! Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß wir in dieser Diskussion ständig eine Annahme über die Existenz von Lösungen gemacht haben, von der wir überhaupt noch nicht wissen, ob sie gerechtfertigt ist: Existieren eigentlich Lösungen für unser Cauchy-Problem, wenn wir auf die Analytizität der Daten verzichten?

5. Einige Beispiele zur Warnung, Grundprobleme

Die letzte Frage mag manchem als etwas übertrieben erscheinen. Überhaupt ist die Wichtigkeit einer solchen Diskussion manchem Physiker nicht so richtig einleuchtend. Deshalb wollen wir an einigen Beispielen illustrieren, daß die Situation nicht so einfach ist, wie sie erscheinen mag.

i) Zur Frage der Existenz und Glattheit. Beispiel von Lewy (1957, nicht früher!)

„Sei $g \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ eine gegebene Funktion und V eine Umgebung von $0 \in \mathbf{R}^3$. Ist die Funktion $u \in C^1(V,\mathbf{R}^2)$ und Lösung der PDgl

$$(*)\begin{cases} \partial_1 u^1 - \partial_2 u^2 + 2x^2\partial_3 u^1 + 2x^1\partial_3 u^2 = g(x^3) \\ \partial_1 u^2 + \partial_2 u^1 - 2x^1\partial_3 u^1 + 2x^3\partial_3 u^2 = 0 \quad , \end{cases}$$

so ist g in einer Umgebung von $x^3 = 0$ reell-analytisch“.

Bemerkungen:

Einen einfachen Beweis findet man z.B. in [7].

Ist g reell-analytisch, so existieren nach dem Satz von C.-K. viele Lösungen von (*), die analytisch sind. Ist g dagegen in $x^3 = 0$ nicht analytisch, so gibt es überhaupt keine Umgebung von $0 \in \mathbf{R}^3$, in der eine stetig differenzierbare Lösung des linearen Systems (*) existiert!!!

Man mag nun einwenden, diese Gleichung sei „unphysikalisch“. Es mag sich auch einiges sagen lassen, um diese Feststellung zu begründen. Es bleibt aber die Frage: Wie sieht man das der Gleichung an? Was könnte mich davor bewahren, eine Theorie mit Feldgleichungen vorzuschlagen, die solche unangenehmen Eigenschaften besitzen?

ii) Zur Frage der Eindeutigkeit und Glattheit.

„Es existieren Funktionen $a = a(t,x)$, $u = u(t,x)$ in $C^\infty(\mathbf{R}^2,\mathbf{C})$, deren Träger in der Menge $\{\ t \geq 0\ \}$ liegt, so daß

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0$$

aber u nicht überall verschwindet!“

Bemerkungen:

Die Aussage wird in [8] in Form einer „Übungsaufgabe“ diskutiert.

Es existieren also mindestens zwei glatte Lösungen der Gleichung, die oben erwähnte und die identisch verschwindende, die auf der Anfangsfläche $\{\ t = 0\ \}$ (welche, wie wir später sehen werden, nicht charakteristisch ist) dieselben Cauchy-Daten haben. Die PDgl sieht aus wie eine linearisierte eindimensionale Euler-Gleichung. Es handelt sich aber um ein System: Die Funktionen a und u können hier nicht reell sein (wäre a reell, so wäre die

Gleichung symmetrisch hyperbolisch, wäre u reell, so wäre ihr Realteil symmetrisch hyperbolisch und wir könnten, wie wir später sehen werden, die Eindeutigkeit der Lösung zeigen)!

iii) Zur Stabilität

Sei $\rho \in \mathbf{R}^+$ und $s \in \mathbf{N}$. Dann können wir die Funktionen

$$u_\rho(x,y,z) = (1+\rho)^{-(2+s)} e^{\rho(iy+z)}$$

als Lösungen einer einparametrigen Schar von Cauchy-Problemen mit Daten auf der Fläche $S = \{z = 0\}$ entweder für die Laplace-Gleichung

$$(a) \quad (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) u_\rho = 0$$

oder für die Wellengleichung

$$(b) \quad (\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2) u_\rho = 0$$

betrachten.

In beiden Fällen folgt für die Cauchy-Daten $(\partial_z)^k u(x,y,0), k = 0,1,$

$$|(\partial_x)^i (\partial_y)^j (\partial_z)^k u_\rho| \leq (1+\rho)^{-(2+\rho)} \rho^{k+j} \to 0 \qquad \text{für } \rho \to 0 \quad ,$$

wenn $i + j \leq s$, während für die Lösungen für $z > 0$ folgt

$$|u_\rho(x,y,z)| = (1+\rho)^{-(2+s)} e^{\rho z} \to \infty \qquad \text{für } \rho \to \infty \quad .$$

Bemerkungen:

Wir haben im Fall (a) Cauchy-Probleme für, wie wir später sehen werden, eine elliptische Gleichung und im Fall (b) Cauchy-Probleme für die Wellengleichung mit Daten auf einer zeitartigen Hyperfläche betrachtet. Die Cauchy-Daten zusammen mit ihren inneren Ableitungen auf der Anfangsfläche bis zur Ordnung s werden beliebig klein, wenn wir ρ hinreichend groß werden lassen, während gleichzeitig die Lösungen für $t > 0$ beliebig groß werden (und zwar für jedes fest gewählte, noch so kleine $t > 0$). Die Lösungen der betrachteten Cauchy-Probleme zeigen also ein instabiles Verhalten, das sowohl im Zusammenhang mit physikalischen Betrachtungen als auch für die Zwecke der numerischen Behandlung höchst unangenehm ist. Wir werden zu untersuchen haben, wie dieses Verhalten mit der Art der Gleichung und mit der gewählten Anfangshyperfläche zusammenhängt.

Die Beispiele legen nahe, unsere Liste von Grundfragen zu erweitern und nach der

EXISTENZ, EINDEUTIGKEIT, STABILITÄT, GLATTHEIT

von Lösungen des Cauchy-Problems zu fragen. Dabei werden wir diese Begriffe präzisieren müssen und auch etwas über ihre Abhängigkeit untereinander erfahren.

Die Frage der Glattheit scheint vom Blickpunkt des Physikers nicht besonders interessant zu sein: Es hat keinen Sinn, mit Messungen überprüfen zu wollen, ob ein Feld von der Differenzierbarkeitsordnung C^{17} oder C^{18} ist. Nichtsdestoweniger gibt es aber physikalisch interessante Vorgänge, die sich mathematisch als „Glattheitsverletzungen" idealisieren lassen, z.B. Fokussierung, Stoßwellen, Phasenübergänge. Darüber hinaus ist die Diskussion der Glattheit von wesentlicher Bedeutung für die technische Durchführung der Existenztheorie: Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen werden im Rahmen geeigneter Funktionenräume diskutiert, die wesentlich durch Glattheitsbedingungen charakterisiert sind. Wir werden diese Fragen etwas in den Hintergrund rücken lassen, aber der aufmerksame Leser wird sie immer wieder anklingen hören.

Man nennt ein Cauchy-Problem „sachgemäß gestellt", wenn sich die ersten drei der oben genannten Eigenschaften in einem geeigneten, präzisen Sinn nachweisen lassen [9], [10]. Als wichtigste Frage betrachten wir zunächst:

Welche Struktureigenschaften (eventuell formuliert bezüglich der gegebenen Anfangshyperfläche) müssen wir von unserer partiellen Differentialgleichung verlangen, um die Fragen nach den oben gegebenen Eigenschaften in einem vernünftigen Sinn positiv beantworten zu können?

6. Der charakteristische Konormalenkegel

Im Zusammenhang mit dem Satz von Cauchy-Kowalewskaya haben wir gesehen, daß bei einem Cauchy-Problem, bei dem die Gleichungen in aufgelöster Form vorliegen eine formale Entwicklung der Lösung eindeutig bestimmt ist. Bei dem Cauchy-Problem in allgemeiner Form ist es nicht klar, ob wir eine ähnliche Aussage machen können. Überraschenderweise wird ein wesentlicher Teil der Struktur, nach der wir suchen, bloßgelegt durch die Beantwortung der einfachen Frage:

Wann läßt sich aus dem Cauchy-Problem in allgemeiner Form;

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & A^i\partial_i u + b = f(x) & \text{auf } V;\ u = u_0 & \text{auf } S \quad \text{bzw.} \\ (\beta) & A^{ik}\partial_i\partial_k u + b = f(x) & \text{auf } V;\ u = u_0,\ \langle du, X\rangle = u_1 & \text{auf } S \quad , \end{array}$$

auf S „die" transversale Ableitung der Ordnung 1 bzw. 2 bestimmen?

Das ist offensichtlich eine Frage an den Hauptteil der Gleichung und an S, da die Werte der Funktion b auf S durch die Cauchy-Daten bestimmt sind. Wenn wir imstande sind, eine transversale Ableitung der gewünschten Ordnung zu bestimmen, können wir daraus und aus den Cauchy-Daten überhaupt alle Ableitungen von u bis zu dieser Ordnung ausrechnen und umgekehrt. Für die folgende Überlegung machen wir die

Annahme: Unsere PDgl ist semilinear, d.h. $A^i = A^i(x)$ bzw. $A^{ik} = A^{ik}(x)$.

Um die obige Frage zu beantworten, benutzen wir, daß das Differential der definierenden Funktion Φ der Hyperfläche S nicht verschwindet in einer Umgebung von S. Zu $x_0 \in S$ gibt es daher ein $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ mit $\partial_j\Phi(x) \neq 0$ für x nahe genug bei x_0. Wir können zur Bequemlichkeit annehmen, daß $j = n+1$ ist. Wir setzen nun

$$x^{i'} = x^i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{und} \quad x^{n+1'} = \Phi(x^1, \ldots, x^{n+1}) \quad .$$

Da $\det(\partial_i x^{i'}) = \partial_{n+1}\Phi \neq 0$ für x nahe x_0, definieren die Funktionen $x^{i'}$ dort ein Koordinatensystem.

Nahe x_0 gilt in diesen Koordinaten $S = \{x^{n+1'} = 0\}$ und daher sind die Ableitungen $\partial_{1'}, \ldots, \partial_{n'}$ tangential zu S. Auf S erhalten wir (wobei wir wieder annehmen, daß die Komponenten von u Skalare sind):

$$(\alpha)\ A^i\partial_i u = A^i\partial_i x^{i'}\partial_{i'}u = (A^i\partial_i\Phi)\partial_{n+1}u + \begin{array}{l}\text{Terme, die } u \text{ und innere Ableitungen}\\ \text{von } u \text{ auf } S \text{ enthalten}\end{array}$$

bzw.

$$(\beta)\ A^{ik}\partial_i\partial_k u = (A^{ik}\partial_i\Phi\partial_k\Phi)(\partial_{n+1'})^2 u + \begin{array}{l}\text{Terme, die } u,\ \partial_{n+1'}u \text{ und innere Ableitungen}\\ \text{davon auf } S \text{ enthalten.}\end{array}$$

Wir definieren nun (unabhängig von den gewählten Koordinaten!) das *Hauptsymbol* unserer PDgl als Abbildung auf dem Kotangentialraum von V (Phasenraum) durch

$$T^*V \ni (x,\xi) \to \sigma_1(x,\xi) = A^i(x)\xi_i \ (\text{bzw. } \sigma_2(x,\xi) = A^{ik}(x)\xi_i\xi_k) \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) \quad .$$

Bei einer Gleichung 3. Ordnung hätten wir $\sigma_3(x,\xi) = A^{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k$ etc. Die ξ_i entsprechen hier den $\partial_i\Phi$ und man sollte sie sich daher als „Flächenstückchen" vorstellen.

Die „Auflösbarkeitsbedingung" in $x \in S$ lautet dann im Fall einer Gleichung der Ordnung m, daß das Hauptsymbol im Punkte $d\Phi(x)$ des Kotangentialraumes invertierbar ist, oder, in anderen Worten, daß die *charakteristische Form in x*

$$\xi \to q_m(x,\xi) := \det \sigma_m(x,\xi)$$

bei $\xi = d\Phi(x)$ nicht verschwindet. Ist diese Bedingung in allen Punkten $x \in S$ erfüllt, so heißt die Hyperfläche S *nirgends charakteristisch* oder *frei*. In diesem Fall läßt sich das Cauchy-Problem durch (viele) Koordinatentransformationen in die aufgelöste Form bringen und bestimmt eine formale Lösung in jeder Ordnung.

Die Nullstellenmenge der charakteristischen Form in $x \in V$

$$C_x = \{(x,\xi) \in T_x^*V | q_m(x,\xi) = 0, \quad \xi \neq 0\}$$

heißt *charakteristischer Konormalenkegel in x*, und die Vereinigung dieser Kegel,

$$C_V = \bigcup_{x\in V} C_x \quad ,$$

heißt *charakteristische Menge* unserer PDgl. Die Struktur der charakteristischen Konormalenkegel ist von entscheidender Bedeutung für die Eigenschaften der Lösungen und die Existenztheorie einer PDgl.

Ist die Fläche S so beschaffen, daß

$$(*) \quad q_m(x, d\Phi(x)) = 0 \text{ für alle } x \in S \quad ,$$

d.h. $d\Phi(x) \in C_x$ für $x \in S$, so heißt die Hyperfläche S „Charakteristik" für unsere PDgl. Es liegt nahe zu vermuten, daß wir Probleme mit der Eindeutigkeit bekommen, wenn wir das Cauchy-Problem mit Daten allein auf einer Charakteristik lösen wollen.

Die Situation ist tatsächlich noch komplizierter. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall (α), der Fall (β) kann, ähnlich wie am Beispiel der Wellengleichung gezeigt, auf den Fall der Gleichung 1. Ordnung zurückgeführt werden. Aus der Bedingung (*) folgt, daß die Matrix $\sigma_m(x, d\Phi(x))$ einen Rang kleiner als N hat. Daher gibt es zu $x \in S$ ein nicht verschwindendes $v_x \in \mathbb{C}^N$, so daß $v_x^T A^i(x)\partial_i\Phi(x) = 0$. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß der Operator $v_x^T A^i(x)\partial_i$ in x tangential zur Hyperfläche S ist. Daher stellt die Gleichung $v_x^T(A^i(x)\partial_i u + b) = 0$ in x eine Bedingung an die Cauchy-Daten dar, d.h.: Die Cauchy-Daten können auf einer Charakteristik nicht frei vorgegeben werden!

Die Charakteristiken haben für den Typ von Gleichungen, der uns im Folgenden besonders interessieren wird, eine große Bedeutung für die Existenztheorie und häufig, interpretiert als „Wellenfronten", eine ebenso große Bedeutung für die physikalische Interpretation der Lösungen. Wir werden noch mehr darüber hören.

Vor der Diskussion des charakteristischen Konormalenkegels und aller davon abgeleiteten Begriffe hatten wir die Annahme gemacht, daß unsere PDgl semilinear sei. Das hat den Vorteil, daß alle Koeffizienten der PDgl, die in die Definition des Hauptsymbols eingehen, von der Unbekannten und ihren Ableitungen unabhängig sind. Im Fall einer quasilinearen Gleichung geht man von einer als gegeben gedachten Lösung u_0 der Gleichung aus und setzt $A^i(x) := A^i(x, u_0(x))$ bzw. $A^{ik}(x, u_0(x), \partial_j u_0(x))$. Damit lassen sich Hauptsymbole und die daraus abgeleiteten Konzepte wie vorher einführen. Alle diese Begriffe hängen dann von der gewählten Lösung u_0 ab.

Mehr über Charakteristiken usw. findet man z.B. in [2], [8] und [11].

Die Struktur des Hauptsymbols gibt Anlaß zu einer Klassifizierung der PDgln. Diese Einteilung ist allerdings etwas grob, wie die Beispiele der Wärmeleitungsgleichung und der Schrödinger-Gleichung zeigen: In beiden Fällen hat das Hauptsymbol die Form $\sigma_2(x, \xi) = (\xi_1^2 + \ldots \xi_n^2)$, während die Lösungen der Gleichungen sehr verschiedene Eigenschaften haben.

Nehmen wir wieder an, daß unsere PDgl semilinear sei, so ist der einfachste Fall in der Klassifizierung durch die Bedingung gekennzeichnet:

„das Hauptsymbol $\sigma_m(x, \xi)$ ist invertierbar für alle $(x, \xi) \in T^*V$ mit $\xi \neq 0$“ .

Eine PDGl, die diese Bedingung erfüllt heißt „elliptisch auf V“. In diesem Fall ist die Auflösbarkeit immer gewährleistet. Unsere Diskussion des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung, dem einfachsten Beispiel einer elliptischen Gleichung, hat aber schon angedeutet, daß das Cauchy-Problem für elliptische Gleichungen nicht sachgemäß ist.

Die Struktur der Hauptsymbole der PDgln, die uns im Folgenden interessieren werden und für die sich das Cauchy-Problem als sachgemäß gestellt erweisen wird, ist komplizierter.

LITERATURHINWEISE

[1] Lovelock: *J. Math. Phys.*, **12**, (1971) 498

[2] Courant, R., Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics* vol. 2, Interscience, New York: 1962

[3] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis*, Band 4, Vieweg, Braunschweig: 1980

[4] Shinbrot, M., Welland, R.R.: *J. Math. Anal. Appl.* **55** (1976) 757

[5] Nirenberg, L.: *J. Differential Geometry*, **6**, (1972) 561

[6] Roos, W.: *Gen. Rel. Grav.*, **7** (1976) 431

[7] Schechter, M.: *Modern Methods in Partial Differential Equations.* Mc. Graw-Hill, New York: 1977

[8] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Band 7. Vieweg, Braunschweig: 1982

[9] Hadamard, J.: *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* Dover, New York: 1952

[10] Fattorini, H.O.: *The Cauchy Problem.* Addison-Wesley, London: 1983

[11] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators.* Vols I–IV. Springer, Berlin: 1983